



Flux et anisotropie du rayonnement cosmique galactique : au-delà des modèles continus

Guilhem Bernard

► To cite this version:

Guilhem Bernard. Flux et anisotropie du rayonnement cosmique galactique : au-delà des modèles continus. Physique [physics]. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : 2013GRENY065 . tel-01367956

HAL Id: tel-01367956

<https://theses.hal.science/tel-01367956>

Submitted on 17 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Physique théorique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Guilhem Bernard

Thèse dirigée par **Richard Taillet**

préparée au sein du **Laboratoire d'Annecy-Le-Vieux de Physique
Théorique**
et de **École doctorale de physique de grenoble**

Flux et anisotropie du rayonnement cosmique galactique : au-delà des modèles continus.

Thèse soutenue publiquement le **29 Octobre 2013**,
devant le jury composé de :

M, Marcowith Alexandre

Chargé de recherche (HDR) - LUPM, Président

M, Strong Andrew

Senior scientist - MPI für extraterrestrische Physik, Rapporteur

M, Marcowith Alexandre

Chargé de recherche (HDR) - LUPM, Rapporteur

Mme, Fiorenza Donato

Professeur - Université de Turin, Examinatrice

M, David Maurin

Chargé de recherche - LPSC, Examineur

M, Julien Laval

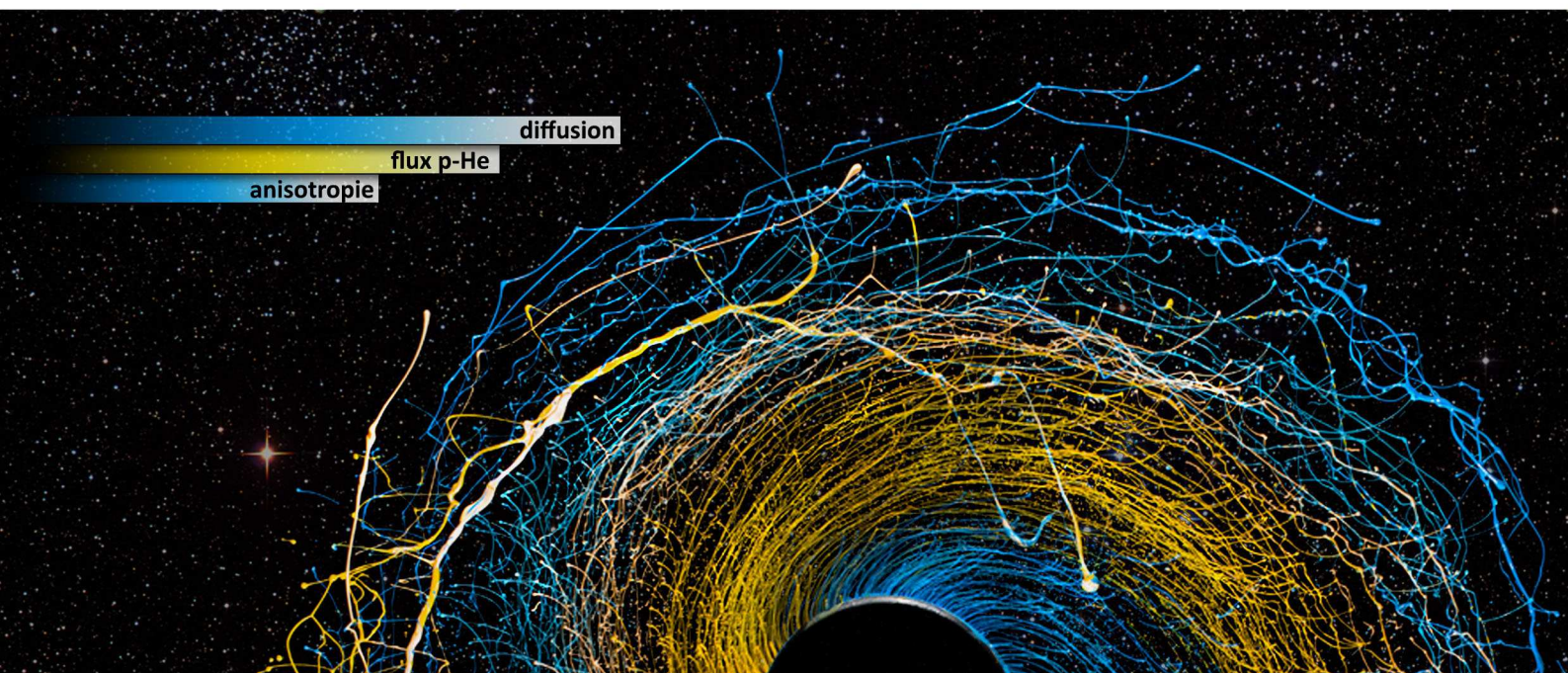
Chargé de recherche (HDR) - LUPM, Examineur

M, Richard Taillet

Professeur - Université de Savoie / LAPTh, Directeur de thèse



Flux et anisotropie du rayonnement cosmique galactique : au delà des modèles continus



Guilhem Bernard

supervisé par : Richard Taillet

Thèse de doctorat
spécialité : physique théorique
2013

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE





Avant-propos	v
Manuel de lecture	vii
Remerciements	viii

Partie Introduction 1

Chapitre 1 - Les astroparticules 1

1	Présentation générale du rayonnement cosmique	1
1.1	Un bref historique	1
1.2	Propriétés générales	2
2	La matière noire	5
2.1	La détection directe	8
2.2	La détection indirecte	8
3	Pour aller plus loin avec les rayons cosmiques	10
4	Motivations	12
4.1	Anomalies dans le spectre en protons et héliums au GeV	12
4.2	L'anisotropie du rayonnement cosmique	14

Partie I

La propagation diffusive 19

Chapitre 2 - La physique de la propagation 21

1	La physique du milieu interstellaire	24
1.1	Le disque galactique	24
1.2	Naissance du champ magnétique galactique	27
1.3	Le vent convectif	30
1.4	Les pertes d'énergie	32
1.5	Les échanges d'énergie avec le plasma	34
1.6	La physique nucléaire	35
1.7	La modulation solaire	37
1.8	Les symétries de la galaxie	38

Table des matières

2	L'accélération des rayons cosmiques	39
2.1	Les mécanismes d'accélération	39
2.2	Les vestiges de supernova comme sources de rayons cosmiques	45
2.3	L'injection des rayons cosmiques	49
3	Étude cinétique du plasma et diffusion	51
3.1	Les propriétés de base du plasma	51
3.2	La forme de la turbulence magnétique	53
3.3	Description cinétique d'un plasma	58
3.4	La fonction de corrélation de la turbulence magnétique	70
3.5	L'approximation quasi-linéaire	76
Chapitre 3 - Construction de l'équation de diffusion		87
1	Les deux lois de Fick et la conservation de la matière	87
1.1	La première loi de Fick	87
1.2	L'équation de continuité	90
1.3	La deuxième loi de Fick	90
2	Interprétation statistique de la diffusion	95
3	Analogie avec les autres domaines de la physique	97
3.1	Construction du courant de convection	98
4	De la diffusion au flux de rayons cosmiques	98
Chapitre 4 - Résolution de l'équation de diffusion		103
1	L'équation de diffusion dans le modèle stationnaire	103
2	L'équation de diffusion dans le cadre d'un modèle de disque épais	116
2.1	Résolution avec une distribution continue de sources	117
2.2	Résolution pour une source ponctuelle	121
3	L'équation de diffusion dans le modèle de la myriade	128
Chapitre 5 - Le coefficient de diffusion		141
1	Les formes complètes du coefficient de diffusion	142
2	Un coefficient de diffusion en loi de puissance	143
3	Les études précédentes et le succès du modèle de diffusion	144
3.1	Les paramètres de propagation et le B/C	145
3.2	Les études d'antiprotons	147
3.3	Les positons	148
4	La physique de l'équation de diffusion	151

Partie II

Les flux de protons et d'héliums 157

Chapitre 6 - La valeur moyenne du flux de protons 161

- 1 Distribution homogène de sources 161
- 2 Distribution réaliste de sources 164

Chapitre 7 - Analyse statistique : la variance du flux 169

- 1 Distribution réaliste de sources 169
- 2 La divergence de la variance, est-ce vraiment un problème ? 173
- 3 Régularisation en utilisant une coupure 175
- 4 La variance est infinie mais les intervalles de confiance sont finis 178
- 5 Une méthode analytique pour les intervalles de confiance 188
 - 5.1 Somme de variables aléatoires stables 190
 - 5.2 Théorème central limite généralisé 191
- 6 Sources locales connues – Le catalogue 193
 - 6.1 Le catalogue est-il probable ? 196
 - 6.2 Les erreurs systématiques du catalogue 197
- 7 Incertitudes finales sur le flux 199

Chapitre 8 - Le taux d'explosion local 203

- 1 Méthode 203
- 2 Première étude 204
- 3 Compatibilité avec le B/C 206

Partie III

L'anisotropie des protons cosmiques galactiques 215

Chapitre 9 - L'anisotropie stationnaire 217

- 1 Expressions analytiques de l'anisotropie 218
 - 1.1 La sphère de dernière diffusion 218
 - 1.2 Rappel sur les harmoniques sphériques 220
- 2 Les expériences 228
 - 2.1 Les systèmes de coordonnées 229
 - 2.2 Principe des mesures 230
 - 2.3 Les résultats 233

Table des matières

2.4	Les différentes explications	236
3	L'anisotropie dans le cadre du modèle stationnaire	238
3.1	Première approche	238
3.2	De la théorie aux expériences	241
Chapitre 10 - La bulle locale		245
1	Étude de l'effet des spallations et de la distribution de sources	246
2	Cas d'un coefficient de diffusion local	254
Chapitre 11 - L'anisotropie des sources ponctuelles		261
1	L'anisotropie dans le modèle de la myriade	261
1.1	Calcul de la variance dans le cadre d'un modèle simple	263
1.2	Calcul de la variance de δ_i	266
2	Les fluctuations des sources locales	269
3	Au-delà de min med max	272
4	La variance du quadripôle	274
5	Conclusion sur la modélisation de l'anisotropie	279
Chapitre 12 - Conclusion		281
Conclusion		281

AVANT-PROPOS

Cette thèse de fin de cycle présente le travail de recherche accompli lors de mes trois années de thèse au Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique et ayant mené à deux publications. Le document est organisé en trois grandes parties abordant chacune des thèmes différents. La première partie est une synthèse des connaissances dans le domaine de la propagation du rayonnement cosmique. Essentiellement bibliographique, elle présente le cheminement scientifique pour arriver aux problématiques que nous traitons.

La deuxième partie de la thèse témoigne d'un travail que j'ai effectué dans le but d'expliquer les anomalies de mesures de flux de protons et d'héliums des expériences CREAM et PAMELA. C'est essentiellement une étude statistique de l'effet de sources ponctuelles aléatoires dans l'équation de propagation du rayonnement cosmique. Cette recherche a été effectuée en équipe avec la collaboration de Timur Delahaye, Wei Liu, Yong-Yeon Keum, Pierre Salati et Richard Taillet. L'épopée du flux de protons m'a fait voyager en Corée du sud, en Espagne et au Brésil. Une grande majorité des problèmes abordés dans cette partie est toujours en développement par différentes parties de la collaboration.

La troisième partie, beaucoup plus personnelle, expose mon travail sur l'anisotropie du rayonnement cosmique mené pendant la première année ainsi qu'à la fin de la dernière année de ma thèse. Ce travail a été mené essentiellement avec Richard Taillet, mon directeur de thèse. Le sujet de l'anisotropie étant mal connu, il permet de s'exprimer librement et les problèmes à traiter sont légion. Je m'intéresserai dans cette partie seulement à quelques-uns d'entre eux.

Pour résoudre tous les problèmes et calculs numériques rencontrés, j'ai développé mon propre code de propagation en C++ pendant ma thèse. Ce code spécifique répond parfaitement à mes besoins car il permet de résoudre de manière rapide et efficace tous les points abordés dans cette thèse. Il fonctionne principalement avec les bibliothèques ROOT¹ et GSL². Ce code fait environ une dizaine de milliers de lignes et est rédigé proprement, il est donc à lui seul une très grande partie de mon quotidien de thésard.

Enfin pour finir, outre les activités parallèles à la thèse (enseignement, formations...), j'ai profité de ces trois années en laboratoire pour effectuer des activités de vulgarisation, notamment quelques conférences grand public et expériences esthétiques et pédagogiques. À titre d'exemple, je laisse au lecteur, un lien youtube³ vers un court métrage de vulgarisation scientifique : "bulle cosmique". Ce film a été réalisé pour la fête de la science 2012 au LAPP/LAPTh, et avait pour but de venir compléter une exposition sur les rayons cosmiques. Le film a été écrit et réalisé pour être projeté dans des conditions bien particulières (salle noire, effets scéniques divers), aussi je ne peux que recommander de profiter d'une pause en cours de lecture de ce manuscrit, pour découvrir ce film au calme dans le

1. ROOT : a data analysis wramework <http://root.cern.ch/>

2. Gnu Scientific Library <http://www.gnu.org/software/gsl/>

3. <http://www.youtube.com/user/BulleCosmique/videos>

Table des matières

noir.

MANUEL DE LECTURE

Ce manuscrit a été écrit dans l'optique de pouvoir continuer les travaux développés dedans. Dans ce but il ne contient pas d'annexes et les calculs sont intégrés dans le corps du document. Ces derniers ne sont évidemment pas nécessaires à la compréhension générale. De ce fait, ils ont été identifiés par des encadrés de couleurs, ainsi le lecteur désireux de comprendre les idées sans entrer dans le détail pourra contourner ces démonstrations. Cependant les détails les plus insignifiants, entre deux lignes de calculs, renferment parfois des informations capitales : par exemple des symétries, ou encore des approximations. Ces informations constituent les piliers des modèles physiques : quels sont les termes que l'on peut négliger ? Pourquoi ? Quelle en est la signification physique ? C'est pourquoi je voulais garder dans ce manuscrit cette connexion maths/physique.

Les trois grandes parties de la thèse sont regroupées en trois couleurs différentes, leur repérage est donc rapide. La bibliographie se trouve à la fin de chaque chapitre. En vous souhaitant une bonne lecture.

REMERCIEMENTS

Il est de coutume d'entamer les remerciements par la direction du laboratoire, ici je souhaiterai aller plus loin que la coutume car ces remerciements sont profondément sincères. Je remercie donc Fawzi Boudjema, directeur du LAPTh et Luc Frappat directeur adjoint tout d'abord de m'avoir accueilli dans les locaux du LAPTh mais surtout pour leur gentillesse, et la réelle implication qu'ils ont dans la vie des thésards, qu'ils ne laisseront jamais tomber. Je remercie également la super équipe de secrétaires de choc, toujours de bonne humeur et d'une efficacité redoutable, merci Dominique Véronique, Virginie. Je ne détaillerai pas les noms du reste du personnel du laboratoire mais leur entrain et leur joie de vivre ont rendu ces trois ans particulièrement agréable pour moi.

Merci à Andy Strong et Alexandre Marcowith pour avoir accepté de rapporter en détail cette thèse, de l'annoter mais aussi pour les suggestions scientifiquement riches qu'ils ont émises. Merci également à Julien Lavalle, Fiorenza Donato et David Maurin pour avoir accepté de faire partie de mon jury, pour avoir lu ma thèse pour les heures de discussions riches de science mais surtout pour les heures de discussion riche d'humanité et de gentillesse, et tous les bon moments passés ensemble.

Merci à mes deux pères spirituels de science. D'abord Pierre pour tes cours passionnants, l'envie de me diriger dans ton équipe de recherche, et le résultat qui a été de passer ces trois splendides années. Je resterai toujours impressionné par tes talents de scientifique tout-terrain, une sorte de 4x4 paré à franchir tous les problèmes. Mais j'ai aussi découvert une magnifique personne et passé des moments extra avec toi et j'espère en passer d'autres.

Richard, merci ne suffirait pas pour décrire tout ce que j'ai acquis à ton contact. J'aimerais te dire merci d'avoir dirigé ma thèse de la manière dont tu la fais mais ça ne suffirait pas, alors je pourrais essayer de l'écrire en majuscule et en gras **MERCI**, mais même pas, **MERCI** ... non plus. Plus qu'un directeur de thèse j'ai découvert un ami, un guide, de la bonne humeur, de la spontanéité, de la vraie vie, de la science, de l'enseignement. Ces moments de vie quotidienne passé à ton contact me manqueront, j'en garderai comme disent les brésiliens du "Saudage" (une nostalgie heureuse), mais pas de soucis, je garde en tête cette citation : *il est toujours difficile de quitter le nid, mais toujours heureux d'y repasser de temps en temps* "Guilhem BERNARD".

Merci à tous les jeunes chercheurs / post doc thésard pour avoir contribué à mon épanouissement dans le laboratoire. Armand, Loïc, Mickaël (désolé pour le red Z). Merci Fabien et ton bignou (n'oublie pas que je t'enlèverai de ces remerciements si tu en joue près de moi), Cyril et son rapport (nombre de mots prononcés)/(Qualité des paroles) proche de 1, Vincent pour avoir été le premier à tenir plus d'un mois dans mon bureau, pour les bons moments passés, les boulettes de papiers jetées, Romain pour toi, Gilles pour les soirées passées à se défouler en réseau, Guillaume pour nous avoir supporté tant de fois dans ton bureau pendant ta rédaction, Timur pour ton accueil, les discussions tant scientifiques que politiques (désolé également pour le red Z). Laurent pour tout ce temps de vie

commune, ces bières écumée, pour avoir travaillé dur pour avoir nos entrées VIP dans chaque bar de la ville, pour ta sagesse et pour toi, toi aussi tu mérites plus qu'un merci en majuscule gras avec la balise "huge"

Il reste une personne qui recoupe toutes ces catégories, Lisa, qui a été à la fois amie, riche en discussion, confidente, relectrice de thèse, personnel de laboratoire, et qui m'a supporté, épaulé, relevé pendant la rédaction, et qui est sûrement la plus belle personne citée ici (mais rassure toi Richard tu arrives juste après), merci pour tout ce que tu as fait, donné, supporté, pendant cette thèse (les remerciements ne concerne que la thèse donc tu n'écope pas ici de 20 pages de remerciements de plus).

1 PRÉSENTATION GÉNÉRALE DU RAYONNEMENT COSMIQUE

1.1 Un bref historique

Nous allons présenter tout au long de cette thèse des théories sur la propagation du rayonnement cosmique. Mais commençons par revoir ce que sont les rayons cosmiques au travers d'un bref historique et d'une discussion sur les enjeux fondamentaux de cette recherche. Rappelons que l'étude du rayonnement cosmique appartient à un domaine parfois appelé astroparticules. C'est un domaine nouveau de la physique développé à partir de la moitié du XX^{ème} siècle. C'est une discipline regroupant astrophysique, cosmologie et physique des particules, elle englobe donc beaucoup de connaissances très récentes en physique. En effet la cosmologie a pu voir le jour suite aux travaux d'Einstein sur la relativité générale au cours des années 1900. La physique des particules elle, a connu un réel boom à partir des années 1950. Les toutes premières mesures du rayonnement cosmique ont été effectuées



FIGURE 1.1: Victor Hess dans son ballon avant d'aller faire des mesures en haute atmosphère

par Victor Hess en 1912 ([Nobel Foundation 1936](#)). À l'origine il ne cherchait pas à détecter un quelconque rayonnement provenant de l'espace mais il s'intéressait simplement aux mesures d'ionisation de l'atmosphère en fonction de l'altitude (cf photo 1.1). cette découverte lui vaut le prix Nobel de

physique en 1936. Charles Thomson avait déjà montré en 1900 que l'atmosphère était ionisée mais ne savait pas décrire ce phénomène. L'évolution de l'ionisation en fonction de l'atmosphère observée par Hess en 1912 le conduisit à postuler l'existence d'un rayonnement d'origine cosmique, mais il ne se prononça pas sur sa nature. Plus tard, Robert Millikan montrera qu'il s'agit de particules chargées. Il existe également dans l'espace un rayonnement électromagnétique dans le domaine des rayons γ souvent associé au rayonnement cosmique. Il s'agit bien d'objets ayant un bout d'histoire commun avec les rayons cosmiques mais ce ne sont pas les rayons cosmiques à proprement parler.

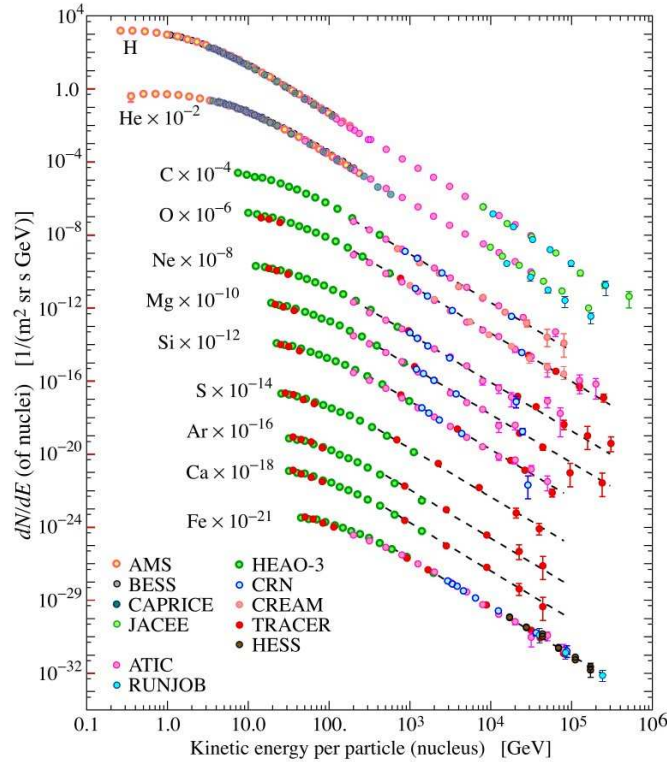


FIGURE 1.2: Flux de rayons cosmiques primaires par espèce en haut de l'atmosphère (Beringer et al. 2012)

1.2 Propriétés générales

Depuis, leur découverte, de nombreuses expériences se sont succédées pour mesurer la composition et le flux du rayonnement cosmique en fonction de l'énergie. Au total, on mesure dans le rayonnement cosmique environ 86% de protons, 11% d'hélium, le reste est constitué d'électrons, de noyaux plus lourds et d'une petite quantité d'anti-matière. Les flux mesurés sont reportés sur la figure 1.2. On sépare les rayons cosmiques en deux groupes : les primaires sont les cosmiques directement accélérés dans les zones appelées sources. Les secondaires sont produits par l'interaction des primaires avec le

milieu interstellaire. Ainsi, les protons, l'hélium, le carbone, l'oxygène et le fer sont produits dans les étoiles et sont connus pour être des primaires. Le groupe lithium-béryllium-bore n'est pas abondant dans la nucléosynthèse stellaire, on considère que ces trois espèces sont des secondaires, sinon ils apparaissent comme secondaires au sens propre.

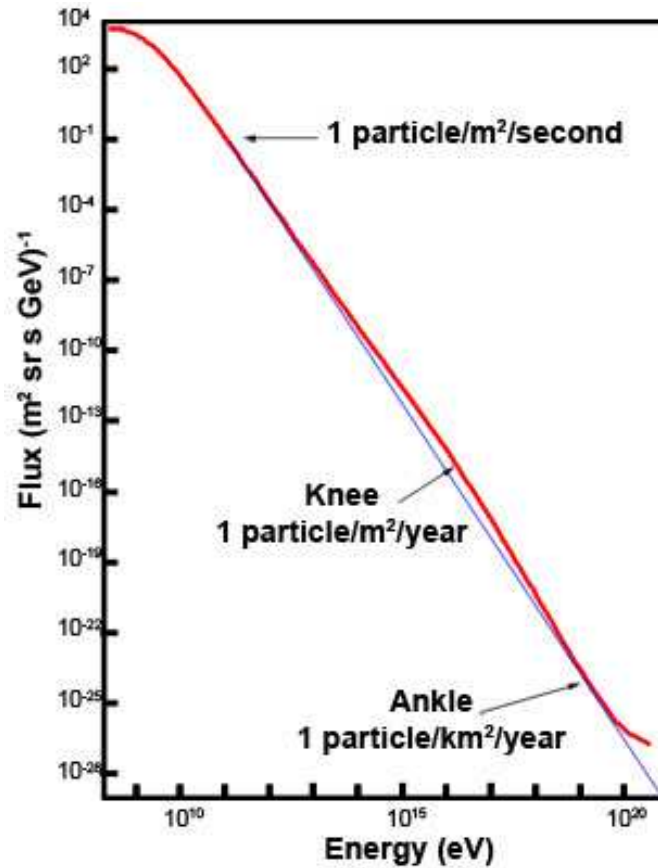


FIGURE 1.3: Flux total de rayons cosmiques primaires en haut de l'atmosphère ([Swinburne University of technology 2013](#))

Une caractéristique importante des rayons cosmiques est leur spectre en énergie, ce dernier s'étend sur plusieurs décades en énergie (voir figure 1.3), depuis le MeV jusqu'à 10^{21} eV. Notons que les spectres sont souvent représentés en unité d'énergie cinétique par nucléon. En effet dans cette unité le flux est quasiment déterminé par une loi de puissance, cependant elle présente des petites brisures de pente. Celles-ci sont très faibles et au premier ordre on pourrait considérer qu'un phénomène s'étendant sur une telle gamme d'énergies décrit par une simple loi de puissance peut se modéliser facilement, mais nous allons voir qu'il présente en fait de nombreux problèmes. Ce spectre peut être divisé en six zones ([Dorman 2006](#)) (voir figure 1.4) :

- zone 0 : 10^{21} eV/nucléon $\geq E_{\text{cin/nuc}} \geq 10^{19}$ eV/nucléon : Au-delà de ces énergies, la théorie la plus acceptée est une atténuation du rayonnement cosmique par effet GZK (pour Greisen-Zatsepin-Kuzmin en référence à leur découvreur) : les cosmiques interagissent avec les photons

du fond diffus cosmologique baignant l'Univers et sont ralentis ou convertis. Dans cette zone les rayons cosmiques sont vraisemblablement produits au-delà de la galaxie, on ne connaît pas de processus galactique suffisamment énergétique pour modéliser cette zone.

- zone I : 10^{19} eV/nucléon $\geq E_{\text{cin/nuc}} \geq 3 \times 10^6$ GeV/nucléon . La provenance des rayons cosmiques de cette zone est assez discutée, on ne sait pas s'ils proviennent de la galaxie ou d'au-delà. La transition de la zone 0 vers la zone I s'appelle la cheville, elle n'est pas représentée sur la figure mais elle est difficile à expliquer car la brisure de pente associée est convexe.
- zone II : 10^6 GeV/nucléon $\geq E_{\text{cin/nuc}} \geq 10^2$ GeV/nucléon . Les rayons cosmiques sont produits dans la galaxie, très probablement dans les supernovæ. La transition de la zone I vers II s'appelle le genou, elle n'est pas encore expliquée, on ne sait pas s'il s'agit d'un changement d'accélérateur de rayons cosmiques, d'une brisure de pente dans la physique de l'accélération du rayonnement cosmique, d'une dominance d'éléments plus lourds que les protons dans le spectre ou encore de sources extra galactiques.
- zone III : 10^2 GeV/nucléon $\geq E_{\text{cin/nuc}} \geq 30$ MeV/nucléon . On trouve des rayons cosmiques d'origine galactique. La transition de la zone II vers III correspond au passage où l'effet du soleil n'a presque plus d'influence sur le rayonnement cosmique.
- zone IV : 30 MeV/nucléon $\geq E_{\text{cin/nuc}} \geq 1$ MeV/nucléon. L'origine des rayons cosmiques peut être multiple et n'est pas claire : accélération via des éjections solaires, par onde de choc à proximité de la magnétosphère. La transition de la zone III vers IV correspond au minimum du spectre en énergie cinétique par nucléons des rayons cosmiques.
- zone V : $E_{\text{cin/nuc}} \leq 1$ MeV/nucléon . La limite entre IV et V est artificielle et dépend beaucoup de l'activité solaire, les processus d'accélération dans cette zone peuvent être nombreux et assez complexes, ils dépendent des champs magnétiques stellaires et des ondes de chocs interplanétaires.

Dans cette thèse, notre intérêt se porte surtout sur les zones II et III.

Il n'existe pas à proprement parler de modèle standard du rayonnement cosmique en 2013, de nombreux problèmes subsistent, dans chaque zone et aux transitions. On ne sait pas reproduire sur toute les échelles d'énergie le spectre du rayonnement cosmique. Les questions ouvertes sont nombreuses :

- Comment les rayons cosmiques sont-ils produits et accélérés ?
- Comment se propagent-ils dans l'Univers ?
- Comment interagissent-ils avec le champ magnétique solaire et planétaire ?
- Quelles sont les observables les plus adaptées à leur observation ?

Pour répondre à toutes ces questions il faudrait avoir une parfaite connaissance de l'Univers, des phénomènes s'y déroulant, et de la matière le constituant. Dans ce cas, le problème n'aurait pas d'autre intérêt qu'une vérification de nos connaissances. Ici, la difficulté est que pendant longtemps nous ne connaissions les observables qu'en bout de chaîne de fabrication, et nous devons composer avec un ensemble de théories pas toujours vérifiées. Avec l'arrivée des méthodes d'observations modernes et notamment des télescopes γ embarqués sur satellites (par exemple le télescope FERMI) nous avons plus d'informations sur les phénomènes intermédiaires se produisant entre l'accélération des rayons

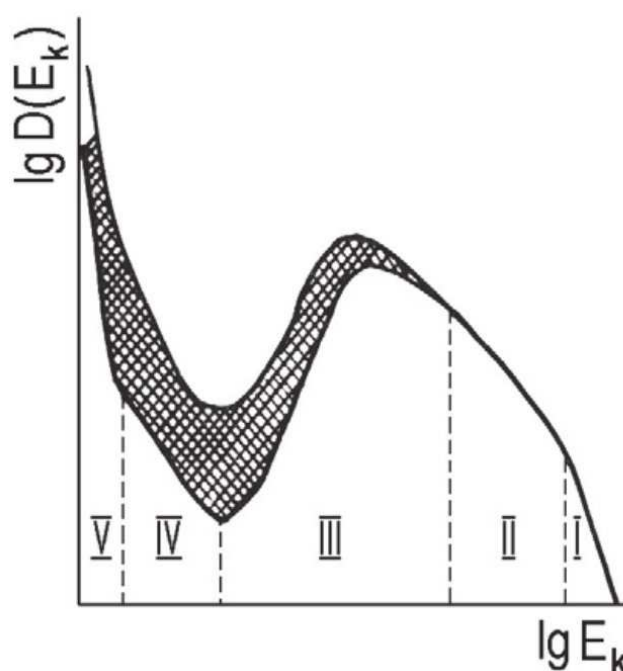


FIGURE 1.4: Les différentes zones du flux de rayonnement cosmique en énergie cinétique par nucléon (Dorman 2006). (En abscisse le flux différentiel).

cosmiques et leur détection. Du fait du manque d'informations, les dérives théoriques sont possibles et souvent tentantes. On peut se laisser séduire par l'idée de vouloir insérer de nouvelles théories à la mode pour résoudre les problèmes avant de considérer des phénomènes de physique plus classiques mais parfois plus compliqués. C'est réellement dans ce contexte que s'insère la problématique de cette thèse. En effet, en 2013 en Astroparticules l'énigme la plus en vogue est le problème de la matière noire. Directement en lien avec l'étude du rayonnement cosmique la matière noire est source de nouvelles physiques. Pour mieux comprendre ce paradigme, détaillons un peu son histoire.

2 LA MATIÈRE NOIRE

La matière noire est un terme générique pour décrire un des problèmes modernes de l'astrophysique. En 1930, alors que la physique est en pleine effervescence avec l'apparition de la mécanique quantique et de la relativité générale, l'astrophysique planche sur des problèmes en apparence plus classiques. À l'époque on vient juste de confirmer l'existence des galaxies. Aussi des chercheurs essaient d'évaluer leur masse, et plus particulièrement la masse des amas de galaxies. Le théorème du

viriel est un théorème mathématique permettant de relier l'énergie gravitationnelle d'un objet, reliée à sa masse, à sa vitesse. Ainsi en estimant la masse d'une galaxie grâce à la connaissance théorique de tous les objets qu'elle contient, on peut estimer les vitesses relatives des galaxies les unes par rapport aux autres. En parallèle, l'effet Doppler, qui est un décalage de la longueur d'onde des photons émis par des objets en mouvement permet de mesurer la vitesse de ces galaxies. Or Fritz Zwicky, le premier à avoir essayé de comparer pour un même amas de galaxies (l'amas des sept galaxies de Coma), la vitesse mesurée par effet Doppler et la vitesse estimée par le théorème du viriel, a observé qu'il manquait dans ces galaxies à peu près 400 fois la masse estimée pour faire correspondre les deux mesures de vitesse ([Zwicky 1933](#)). La précision des mesures de l'époque et le caractère du personnage n'ont pas séduit la communauté scientifique de l'époque et la mesure n'a pas eu d'impact, du moins pour quelques années. Trois ans plus tard Sinclair Smith refait la même mesure dans l'amas de la Vierge et retrouve un résultat similaire ([Smith 1936](#)), qui a été lui aussi peu perçu par ses pairs. Il faudra attendre une trentaine d'années plus tard, pour qu'en 1976 Vera Rubin, avec l'évolution des technologies, puisse faire cette mesure au sein d'une seule galaxie : NGC 3114 ([Rubin et al. 1976](#)). Elle mesure alors la vitesse de rotation d'une galaxie en fonction de la distance jusqu'à son centre. Le résultat est beaucoup plus marquant, la courbe de vitesse de rotation obtenue n'est pas du tout celle qui est dérivée simplement en construisant la galaxie avec toute la matière connue à l'époque (voir figure 1.5).

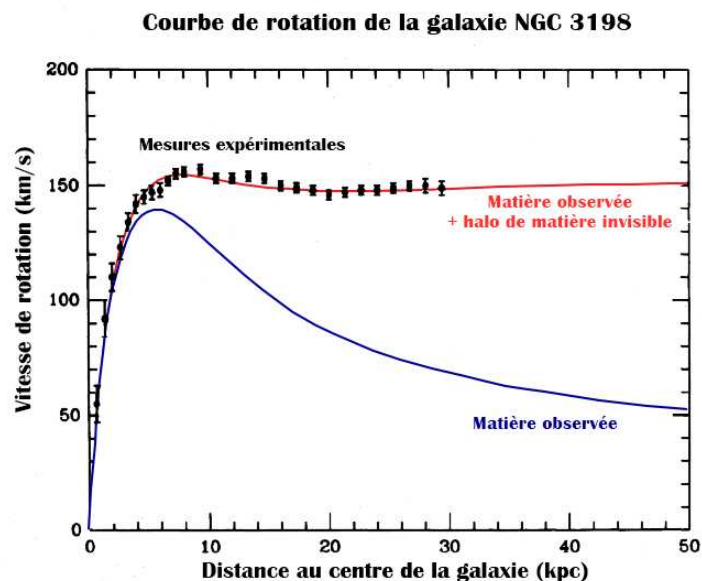


FIGURE 1.5: Courbes de rotation de vitesse de la galaxie ([Kamionkowski 1998](#))

Depuis le problème est considéré très sérieusement et répond au nom de matière noire. Beaucoup d'observations ont mis en évidence l'existence de cette matière noire et des effets qu'elle peut avoir sur son environnement astrophysique et cosmologique. Aujourd'hui principalement deux théories

s'opposent pour expliquer ces problèmes :

- La matière noire est un nouveau type de matière (qui n'est pas de la matière connue) : si on ajoute cette matière à la matière connue dans la galaxie, on retrouve les bonnes courbes de rotation (voir figure 1.5).
- La matière noire est une modification des lois de la gravitation aux petites accélérations : c'est la MOND pour "modified Newton Dynamics" (Sanders & McGaugh 2002). Dans cette formulation de la gravitation, le terme d'accélération dans la loi de Newton est transformé pour être modifié aux "faibles" accélérations et conservé aux "fortes" accélérations, constituant la physique Newtonienne. Les mots fort et faible sont ici séparés par une accélération de référence qui est de

$$a_0 = 1.2 \times 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Cette Théorie possède aussi une extension relativiste écrite tensoriellement appelée TeVeS.

Les partisans de la deuxième hypothèse sont moins nombreux pour plusieurs raisons : la théorie à ses débuts n'était pas exprimable sous forme tensorielle (et ce bien que les outils mathématiques étaient connus et largement utilisés dans la relativité générale). Or, pour beaucoup de théoriciens, c'est un prérequis pour qu'une théorie de la gravitation soit correcte. Depuis beaucoup de progrès ont été faits et la théorie est écrite tensoriellement (bien que de façon assez compliquée). De plus, à ses débuts, la modification du terme d'accélération dans la théorie a été faite de façon complètement ad-hoc pour expliquer les courbes de rotation des galaxies, ce qui n'a pas vraiment plu, notamment l'interprétation du terme a_0 ne convainc pas toute la communauté scientifique. Selon Milgrom, "il s'agit de l'accélération qu'il faudrait pour passer du repos à la vitesse de la lumière pendant la vie de l'Univers. C'est également l'ordre de grandeur de l'accélération récemment découverte de l'expansion de l'univers." (Interview de Milgrom, 2003 (Michael Szpir 2013)). Aujourd'hui le débat est plus tranché et les arguments permettant d'exclure la théorie MOND sont peu nombreux. L'argument principal étant le comportement de l'amas du boulet qui ne peut pas être expliqué complètement par la théorie MOND (Stuart Clark, Chris Lintott 2012).

Ce qui motive le travail de cette thèse c'est plutôt le premier point, l'hypothèse d'une matière existante, mais que l'on a pas encore observée et qui interagit très peu (sans quoi on l'aurait déjà détectée). Une très faible interaction ne veut pas dire pas d'interaction du tout, donc à priori il devrait exister des manières de la détecter, et c'est là que la physique des particules entre en jeu. La physique des particules est basée sur un modèle standard, qui contient un certain nombre de particules connues et observées. Cependant ce modèle standard souffre de quelques petits problèmes, citons le problème de hiérarchie (la base du problème est de savoir pourquoi par exemple le couplage de la gravitation est si faible devant les autres couplages). Il se trouve que certaines théories peuvent résoudre une partie de ces problèmes, parmi elles, certaines prédisent l'existence de particules qui sont de bons candidats à la matière noire. On parle plus souvent de la "supersymétrie" par exemple. On peut donc construire des théories physiques autorisant la présence de matière encore non détectée dans l'Univers, on appelle généralement cette (ou ces) particules des WIMP (pour weakly interacting massive particle). Le

candidat le plus probable a pendant longtemps été le neutralino (noté χ). D'autres théories suggèrent des modèles plus exotiques, de dimensions supplémentaires par exemple. Aujourd'hui on essaye de détecter la matière noire principalement par deux moyens : la détection indirecte et la détection directe dont nous allons parler maintenant.

2.1 La détection directe

Les observations de courbes de rotation des galaxies nous permettent d'estimer la répartition de matière noire dans la galaxie, et il se trouve que l'hypothèse la plus fiable consiste à affirmer que cette matière est répartie en halo englobant les galaxies. On ne connaît pas exactement le comportement des particules de matière noire au sein de ces halos mais comme elles interagissent très faiblement avec la matière connue on peut supposer qu'elles sont en équilibre thermique, comme un gaz de Boltzmann, avec une distribution de vitesse bien définie. Comme le Système solaire et par extension la Terre sont en mouvement dans ce halo, on peut supposer qu'en chaque instant on est traversés par un vent de particules de matière noire avec un vecteur vitesse dirigé dans le sens opposé de celui du mouvement de la Terre dans la galaxie. Pour la détection directe on conçoit des détecteurs avec des cibles qui sont susceptibles d'entrer en collision avec les particules de matière noire, auquel cas elles subissent un léger recul. On essaye donc de détecter ces reculs. Certaines expériences dites "directionnelles" essaient de retrouver la distribution en direction des reculs à partir de laquelle on peut retrouver la distribution en direction des particules incidentes, citons par exemple les expériences DMTPC ([Sciolla et al. 2008](#)), DRIFT ([Daw et al. 2011](#)), MIMAC ([Grignon et al. 2009](#)). Le but est de montrer que la distribution de vitesse obtenue est celle de la matière noire. D'autres, comme DAMA/LIBRA ([Bernabei et al. 2013](#)) essaient d'observer une modulation saisonnière dans le signal observé. En effet en fonction de la position de la Terre par rapport au soleil, on devrait être sensible à un "vent" plus ou moins important de matière noire. Pour finir certaines expériences sont sensibles principalement à des collisions de particules de matière noire car leur bruit de fond est bien défini, auquel cas la direction importe peu. Toutes ces expériences sont très délicates car elles requièrent une sensibilité extrême et une très bonne évaluation du bruit de fond pour essayer de détecter quelques événements par an, citons par exemple les expériences XENON ([Collaboration et al. 2012](#)), Edelweiss ([Collaboration et al. 2011](#)), CDMS ([CDMS Collaboration et al. 2013](#)), CRESST ([Majorovits et al. 2004](#)).

2.2 La détection indirecte

Si nous considérons que la matière noire est faite de particules de matière, alors elle est susceptible d'interagir même si c'est très faiblement. Prenons l'exemple du neutralino, c'est un candidat à la matière noire provenant du modèle supersymétrique. Il a l'avantage d'être assez stable ce qui autorise sa présence en continu depuis la création de l'Univers. Il a aussi la particularité de pouvoir s'annihiler avec un autre neutralino. La physique des particules nous permet de prédire les produits de désinté-

gration associés ainsi que les sections efficaces. La figure 1.6 nous montre un exemple d'annihilation de deux neutralinos. La désintégration a tendance à produire des couples particules / antiparticules. L'anti-matière étant largement dominée par la matière dans l'Univers, ces particules d'anti-matière sont plus susceptibles de produire des excès dans les spectres d'anti-noyaux de rayons cosmiques. Comme la matière noire est localisée dans un halo englobant la galaxie, répartie de manière homo-

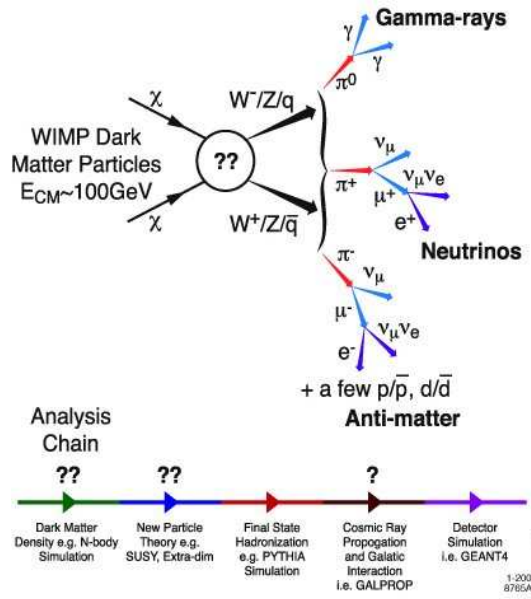


FIGURE 1.6: Exemple d'annihilation de matière noire (Morselli & Canadas 2010)

gène ou non, il peut exister des zones dans la galaxie où ces interactions ont lieu. En ayant de bonnes connaissances de la matière dans la galaxie, on peut prédire le flux de rayonnement cosmique que nous recevons. La détection indirecte de matière noire consiste donc à essayer de détecter la présence d'excès de certains types de rayons cosmiques. Notamment les anti-particules qui sont de bon candidats. Pour pouvoir valider de telles observations et les confirmer comme étant de la matière noire il faut être sûr que des anomalies mesurées ne peuvent provenir de phénomènes astrophysiques. La figure 1.6 illustre toutes les étapes physiques entre la détection d'anti-matière et l'annihilation possible de matière noire. Il est important de connaître et maîtriser toutes ces étapes pour essayer de faire de la détection indirecte de matière noire. Le propos de cette thèse est l'étude de la propagation du rayonnement cosmique, qui permet de déterminer l'abondance de chaque espèce de rayons cosmiques en fonction de la présence ou non de matière noire.

3 POUR ALLER PLUS LOIN AVEC LES RAYONS COSMIQUES

Le domaine des rayons cosmiques ne touche pas uniquement la science fondamentale et aujourd'hui de nombreuses applications sociétales voient le jour, dans lesquelles la connaissance des flux de rayons cosmiques dans le Système solaire est nécessaire. Les rayons cosmiques étant présents dans l'espace et donc en haut de l'atmosphère, les problèmes qu'ils causent à l'être humain sont surtout en lien avec les astronautes ou l'électronique embarquée. En effet, il existe un risque pour qu'un rayon cosmique puisse interagir avec une molécule d'ADN pour la faire muter et provoquer ainsi des cancers. C'est d'ailleurs une des raisons principales de l'extrême difficulté de missions humaines jusqu'à la planète Mars, l'exposition de l'équipage aux rayons cosmiques étant alors prolongée (Kerr 2013).

Au niveau de la Terre nous ne recevons pas directement les rayons cosmiques mais le produit de leur interaction avec l'atmosphère. Encore une fois l'étude du flux de rayonnement cosmique permet une meilleure connaissance de ces produits d'interaction. Parmi eux certains sont caractéristiques car leur présence sur Terre est essentiellement due aux rayons cosmiques. Certaines applications sont en lien directement avec ces muons. A titre d'exemple détaillons ici trois applications.



FIGURE 1.7: En bleu : le champ de vue du détecteur à l'intérieur de la pyramide (Aguilar et al. 2013)

Des expériences en cours sont menées sur la pyramide du soleil de Teotihuacan par (Aguilar et al. 2013) pour essayer de découvrir la présence de conduits ou de chambres cachées dans le monument. Le principe est le suivant : le détecteur de muons reçoit des particules provenant de toutes les directions, en fonction de la matière traversée par ces derniers leur flux sera plus ou moins atténué. Dans le cas de la pyramide de Teotihuacan, le principe de l'expérience consiste à comparer le flux de muons mesuré dans la chambre principale de la pyramide, au flux de muon simulé au même endroit en considérant l'architecture déjà découverte de l'édifice. Si les deux flux correspondent alors il est très peu probable qu'il existe des pièces, ou de conduits encore non découverts dans le monument. À contrario, si le flux mesuré dans une direction donnée diffère du flux théorique alors il est très probable que l'architecture de la pyramide dans cette direction diffère de l'architecture connue. Le champ de vue du détecteur est représenté sur la figure 1.7. Le signal simulé et le signal reconstruit sont eux montrés sur la figure 1.8. Les différences qui existent entre les deux signaux sont pour le moment

attribuées à une méconnaissance de la variation de densité du matériaux de la pyramide, elles ne sont donc pas provoquées par la présence de nouvelles pièces. Cependant la méthode étant encore au stade très expérimentale ces premiers résultats préliminaires permettent de l'améliorer.

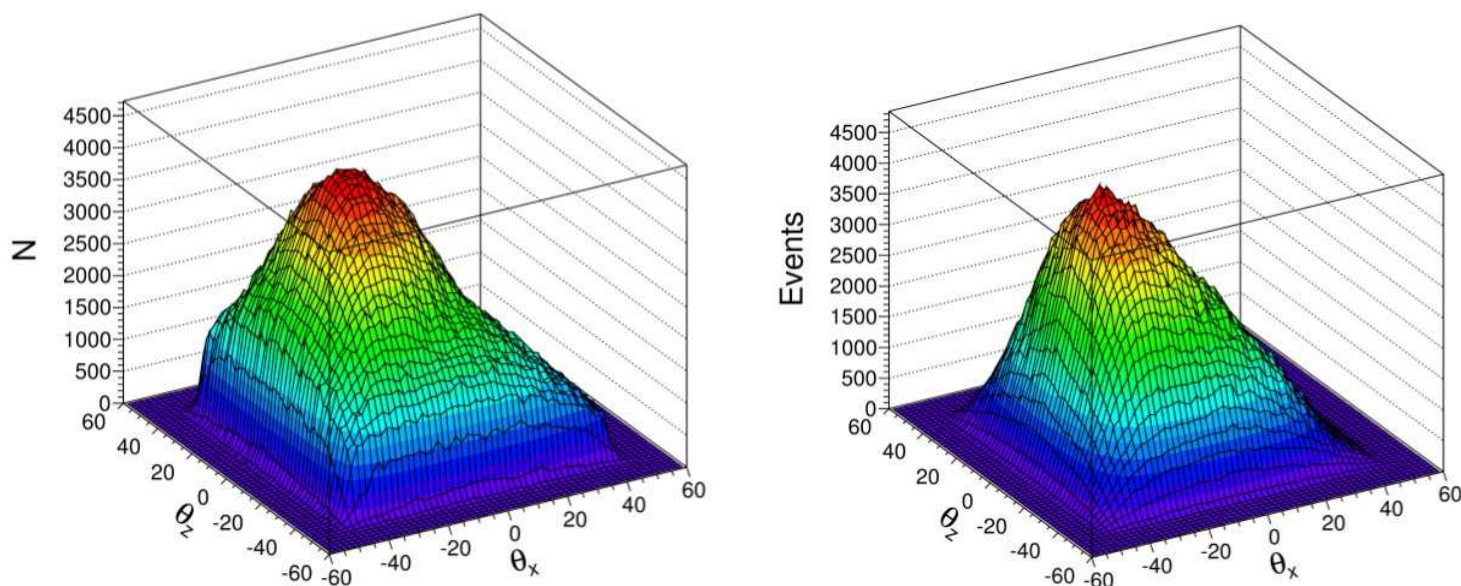


FIGURE 1.8: À gauche : reconstruction théorique du signal, à droite : signal mesuré (Aguilar et al. 2013)

On utilise également les détecteurs de muons cosmiques autour des volcans pour essayer de déterminer, grâce au trajet horizontal des muons à travers la montagne la quantité de magma présent (Nagamine 2007). Ces études sont effectuées en fonction du temps, en effet si le nombre de muons détecté change au cours du temps alors la densité de la montagne change. Une des raisons principales de cette variation de densité est une augmentation de la quantité de roche en fusion ce qui signifie souvent une éruption imminente. Un tel système est déjà utilisé sur le mont Asama et le mont West Iwate au japon. Ces détecteurs pourraient équiper plus de volcans et à l'avenir aider à prévenir les dangers des éruptions.

Pour finir citons une dernière application dans la détection de contrebande de matière nucléaire (Morris et al. 2013). En effet l'uranium et le plutonium sont extrêmement radioactifs et peuvent donc être détectés avec des rayons gamma ou des compteurs Geiger. Pour éviter cette signature le matériel nucléaire de contrebande doit être protégé par d'épaisses couches de plomb ou d'or. Or ces couches protectrices ainsi que le matériel nucléaire ne sont pas imperméables aux muons cosmiques et les diffusent de manière particulière. Ce processus de diffusion est bien connu et en plaçant des détecteurs de muons en dessous de camions transporteurs ou de caisses de cargaisons les autorités arrivent à déceler en peu de temps (de l'ordre de la minute) la présence de matière nucléaire de contrebande

protégée d'autres détecteurs. Cette méthode a également été proposée pour étudier l'état des cœurs de la centrale de Fukushima ([Borozdin et al. 2012](#)).

Ces applications sont très périphériques à cette thèse, elles concernent seulement le même domaine. Elles sont aujourd'hui encore peu connues mais pourtant très utiles. Elles sont le fruit direct de la recherche la plus fondamentale, il était donc pour moi important de souligner les retombées indirectes de ce domaine. Revenons maintenant dans le vif du sujet avec le détail du sujet que nous détaillerons ici.

4 MOTIVATIONS

Pour contraindre la propagation du rayonnement cosmique, nous adoptons deux points de vues : le premier est de travailler dans un canal où l'on est sûr que les effets de la matière noire ne se feront pas sentir afin de se concentrer sur des phénomènes physiques connus. Le deuxième point de vue est de travailler sur des canaux privilégiant les effets de la matière noire (en étudiant les anti-particules). Les deux méthodes combinées permettent de décrire de manière consistante la propagation des rayons cosmiques et l'application à la détection indirecte de matière noire. Dans cette thèse nous travaillerons surtout sur la première méthode, néanmoins nous mentionnerons l'anti-matière sans entrer dans des études détaillées. Au contraire nous travaillerons en grande partie sur les protons, qui constituent quasiment tout le rayonnement cosmique et dont la présence s'explique naturellement par la physique stellaire. Nous travaillerons aussi sur quelques noyaux plus lourds, notamment l'hélium. La propagation de ces espèces est modélisée depuis relativement longtemps. Elle est d'abord apparue naturellement dans les calculs théoriques d'interactions entre matière ionisée et champ magnétique, puis s'est développée notamment via des codes numériques prenant en compte de nombreux phénomènes physiques dans la galaxie (ces phénomènes seront discutés dans le chapitre 2). Les principaux codes utilisés entre le GeV et la centaine de TeV sont GALPROP ([Moskalenko & GALPROP Team 2013](#)) et DRAGON ([Maccione et al. 2011](#)), citons également USINE ([Maurin 2011](#)) moins utilisé car nouveau venu, qui a le bénéfice d'être très rapide. Malheureusement il subsiste quelques problèmes encore non expliqués. Nous en abordons deux dans cette thèse : une brisure de pente dans le spectre de rayons cosmiques primaires au GeV et l'anisotropie du rayonnement cosmique au TeV.

4.1 Anomalies dans le spectre en protons et héliums au GeV

L'expérience PAMELA ([Adriani et al. 2011](#)) a mesuré le spectre des cosmiques primaires entre le GeV et quelques centaines de GeV. On attendait de cette mesure l'habituel spectre de puissance pour

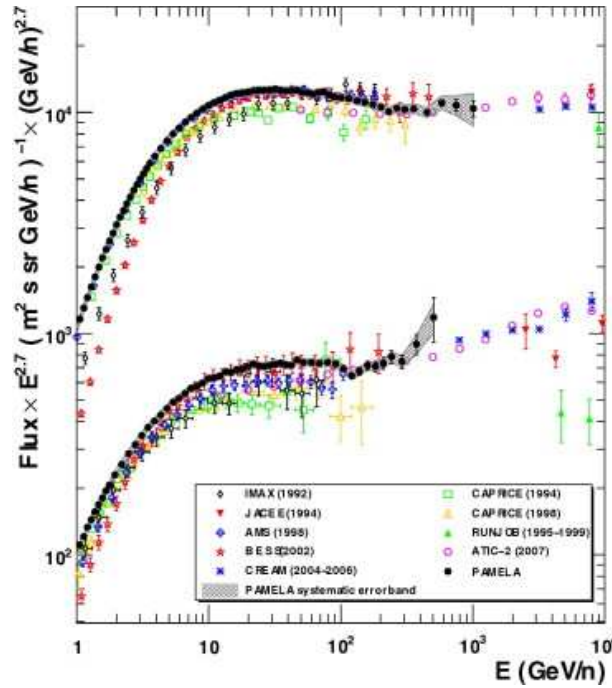


FIGURE 1.9: Mesures des flux de protons et d'hélium par l'expérience PAMELA (Adriani et al. 2011). Les résultats laissent apparaître une brisure de pente autour de 100 GeV.

ce domaine, moyennant les effets solaires. Or l'expérience a observé une brisure de pente à 232 ± 30 GeV pour les protons et à 243 ± 30 GeV/nuc pour l'hélium (voir figure 1.9). À l'heure actuelle on ne sait pas si cet effet est un effet instrumental ou physique provenant de l'accélération dans les sources, de la répartition des sources ou de propagation à proprement parler. Notons aussi que cet effet est visible dans la gamme haute des énergies de mesures de PAMELA or comme cet effet n'est pas encore confirmé par une autre expérience, il peut s'agir d'une distorsion de la mesure aux énergies limites de détection. Dans cette thèse nous prenons le parti d'explorer des hypothèses provenant de la physique de la galaxie. Nous allons particulièrement étudier un effet dans la répartition stochastique des sources du rayonnement cosmique. En considérant que les sources du rayonnement cosmique sont ponctuelles dans la galaxie, le flux que nous mesurons est la somme des flux de chacune des sources du rayonnement cosmique. Est-il possible qu'une certaine répartition de sources provoque un excès dans le flux par rapport au flux moyen ? La question est particulièrement délicate car nous verrons que les rayons cosmiques se propagent de manière diffusive dans la galaxie et perdent donc presque toutes informations sur leur lieu d'accélération. Cette problématique de sources stochastiques que nous ne sommes pas les premiers à relever (Ptuskin et al. 2006; Higdon & Lingenfelter 2003; Blasi & Amato 2011) soulève d'importants problèmes mathématiques, en effet les distributions statistiques en jeu dans la théorie de la propagation du rayonnement cosmique ont une variance infinie. La variance (et par extension l'écart-type) est un outil fondamental de la statistique pour essayer de décrire précisément notre problème, c'est à dire la probabilité pour que le flux de rayonnement cosmique observé soit très

différent du flux prédit. Nous ferons donc appel aux distributions stables de la statistique qui donnent une alternative à l'écart-type pour déterminer la dispersion d'une distribution. Nous verrons ensuite qu'une autre possibilité consiste à faire appel à un catalogue de sources locales, ce procédé permet de faire disparaître la divergence dans la variance. D'autre part nous montrerons que pour expliquer un excès dans le flux de protons nous ferons appel à une surdensité de sources locales. Ces modèles nous permettront de déterminer des paramètres du champ magnétique galactique compatibles avec les flux observés.

4.2 L'anisotropie du rayonnement cosmique

Les expériences MILAGRO ([Abdo et al. 2008](#)), ICE CUBE ([IceCube Collaboration et al. 2011](#)), TIBET AS ([Amenomori et al. 2006](#)) ont effectué des mesures d'anisotropie du rayonnement cosmique autour du TeV. Ces expériences ont l'avantage d'avoir tracé des cartes de projection de l'anisotropie. Nous verrons que nos modèles de propagation nous permettent de retrouver l'équivalent de ces cartes. Or autour de 10 TeV les cartes observées (voir figure 1.10) présentent des zones d'excès qui sont inexpliquées. Le comportement de l'anisotropie en fonction de l'énergie ne colle pas non plus avec les modèles classiques de propagation, c'est pourquoi nous appliquerons notre modèle aux calculs d'anisotropies. D'autre part nous étudierons de près les méthodes de mesure des expériences pour essayer d'expliquer le comportement énergétique de l'anisotropie. Cette étude plus longue à mettre en œuvre numériquement nous permet de conclure sur la position d'éventuelles sources locales et de resserrer l'espace de paramètres du champ magnétique galactique.

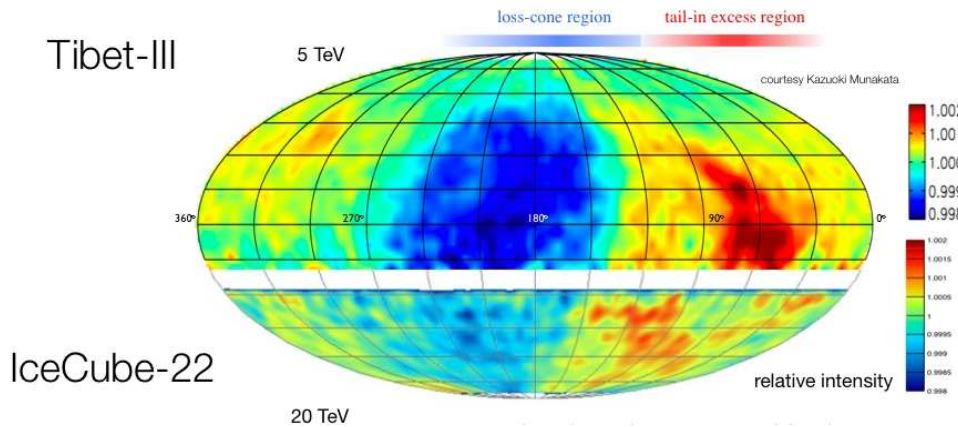


FIGURE 1.10: Mesures combinées de MILAGRO et ICECUBE de projection de l'anisotropie ([IceCube Collaboration et al. 2011](#); [Amenomori et al. 2006](#))

Avant d'entrer dans le détail des modèles, nous décrirons la physique de la propagation. Nous verrons que les cosmiques se propagent en diffusant sur les inhomogénéités du champ magnétique galactique et qu'ils sont soumis aux phénomènes classiques d'interaction nucléaire et de pertes éner-

gétiques. Nous verrons aussi qu'en plus ils sont soumis aux phénomènes de la physique des plasmas qui leur permettent de gagner ou perdre de l'énergie. Enfin nous évoquerons les travaux précédents effectués avec des modèles de propagation assez proches et nous montrerons qu'ils ont permis de déterminer certains paramètres-clé propres au champ magnétique galactique et surtout à l'interaction entre champ magnétique et particule chargée.

RÉFÉRENCES

- Abdo, A. A., Allen, B. T., Aune, T., et al. 2008, *ApJ*, 698, 2121
- Adriani, O., Barbarino, G. C., Bazilevskaya, G. A., et al. 2011, *Science*, 332, 69
- Aguilar, S., Alfaro, R., Belmont, E., et al. 2013, in *ICRC 2013*, Rio de Janeiro
- Amenomori, M., Ayabe, S., Bi, X. J., et al. 2006, *Science*, 314, 439
- Beringer, J., Arguin, J. F., Barnett, R. M., et al. 2012, *PRD*, 86
- Bernabei, R., Belli, P., Di Marco, A., et al. 2013, *ArXiv e-prints*, 1301, 6243
- Blasi, P. & Amato, E. 2011, *JCAP*
- Borozdin, K., Greene, S., Lukić, Z., et al. 2012, *PRL*, 109
- CDMS Collaboration, Agnese, R., Ahmed, Z., et al. 2013, *ArXiv e-prints*, 1304.4279
- Collaboration, E., Armengaud, E., Augier, C., et al. 2011, *Physics Letters B*, 702, 329
- Collaboration, X., Aprile, E., Alfonsi, M., et al. 2012, *PRL*, 109
- Daw, E., Dorofeev, A., Fox, J. R., et al. 2011, *ArXiv e-prints*, 1110.0222
- Dorman, L. 2006, *Cosmic Ray Interactions, Propagation, and Acceleration in Space Plasmas*
- Grignon, C., Bernard, G., Billard, J., et al. 2009, *JINST*, 4
- Higdon, J. C. & Lingenfelter, R. E. 2003, *ApJ*, 582, 330
- IceCube Collaboration, Abbasi, R., Abdou, Y., et al. 2011, *ApJ*, 740, 16
- Kamionkowski, M. 1998, *ArXiv e-prints*, 9809214
- Kerr, R. A. 2013, *Science*, 340, 1031
- Maccione, L., Evoli, C., Gaggero, D., & Grasso, D. 2011, *Astrophysics Source Code Library*
- Majorovits, B., Angloher, G., Bucci, C., et al. 2004, *ArXiv e-prints*, 0411396
- Maurin, D. 2011, in *crpa Conference*
- Michael Szpir. 2013, *Dark-Matter Heretic* » *American Scientist*,
<http://www.americanscientist.org/issues/pub/dark-matter-heretic>
- Morris, C. L., Bacon, J., Borozdin, K., et al. 2013, *ArXiv e-print*, 1306.0523
- Morselli, A. & Canadas, B. 2010, *ArXiv e-print*, 1012.2292
- Moskalenko, I. & GALPROP Team. 2013, *AAS*
- Nagamine, K. 2007, *Introductory muon science* (Cambridge : Cambridge University Press)
- Nobel Foundation. 1936, *Nobel Prize in Physics 1936 - Presentation Speech*,
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1936/press.html
- Ptuskin, V. S., Jones, F. C., Seo, E. S., & Sina, R. 2006, *ASR*, 37, 1909
- Rubin, V. C., Peterson, C. J., & Ford, W. K. 1976, 297
- Sanders, R. H. & McGaugh, S. S. 2002, *A&A*, 0204521, 263
- Sciolla, G., Lee, A., Battat, J., et al. 2008, *ArXiv e-prints*, 0810.0291
- Smith, S. 1936, *ApJ*, 83, 23
- Stuart Clark, Chris Lintott. 2012, *Dark Matter – A Two-Handed Discussion* » *Flamsteed Astronomy Society*, <http://flamsteed.info/2012/05/dark-matter-a-two-handed-discussion/>

RÉFÉRENCES

Swinburne University of technology. 2013, Cosmic Ray Energies | COSMOS, <http://astronomy.swin.edu.au/cosmos/C/Cosmic+Ray+Energies>

Zwicky, F. 1933, Helvetica Physica Acta, 6, 110

PREMIÈRE PARTIE :



LA PROPAGATION DIFFUSIVE

Il est aujourd'hui largement accepté que les rayons cosmiques se déplacent dans l'Univers de façon diffusive, ils ne diffusent pas via des collisions élastiques entre particules mais sur les inhomogénéités du champ magnétique galactique. Les premiers indices de cette diffusion apparaissent avec les premiers calculs de propagation de particules chargées dans un milieu magnétisé. Ces calculs, aujourd'hui au cœur de la physique des plasmas, sont apparus assez naturellement dans les années 60 quand il a été question de décrire le comportement des rayons cosmiques dans notre Univers. En effet il est apparu très vite que l'âge moyen des rayons cosmiques était incompatible avec l'interaction des rayons cosmiques avec un champ magnétique non turbulent. La solution proposée a été de considérer un champ magnétique turbulent. Les premiers calculs laissant penser à une diffusion des rayons cosmiques sur les inhomogénéités du champ magnétiques ont été conduit par J. Randy Jokipii (1965) et Eugene Parker (1957) ([Jokipii & Parker 1969](#)). Par la suite les calculs ont été mûris, développés, et leur interprétation a été facilitée avec l'apparition du calcul numérique. Alors l'hypothèse de diffusion des rayons cosmiques sur le champ magnétique turbulent a été confirmée ([Berezinskii & Ginzburg 1990](#)). Puis les premières équations de diffusion ont été dérivées. Dès lors des modèles complets de diffusion dans la galaxie ont été créés avec des géométries permettant des résolutions semi-analytiques ([Jones 1999](#)). Une mesure-clé arrivant par la suite a fini de confirmer l'hypothèse de diffusion : la mesure d'anisotropie du rayonnement cosmique. En effet, nous verrons que les sources pouvant accélérer des particules à des énergies de l'ordre du GeV ou du TeV doivent nécessairement être spatialement localisées dans la galaxie, c'est pourquoi les observations d'anisotropie de rayonnement cosmique devraient a priori mettre en évidence la direction de ces sources. Or, il a été observé un signal isotrope (avec des fluctuations de flux environ 10^{-3} fois plus faibles que leur valeur moyenne au TeV ([Amenomori et al. 2006](#))). On postule donc qu'il existe un mécanisme de diffusion des rayons cosmiques qui leur fait perdre toutes informations sur leur provenance initiale.

Ce milieu magnétisé dans lequel est baigné le rayonnement cosmique s'appelle un plasma. Il existe plusieurs manières de traiter les équations liées aux plasmas, elles s'appuient à la fois sur les équations de la mécanique des fluides, de la cinétique et les équations de Maxwell. Dans certaines conditions, résoudre ces équations est possible, moyennant quelques approximations sur la géométrie du domaine de travail et sur la nature du champ magnétique. Dans le cas du rayonnement cosmique, le champ magnétique est presque toujours turbulent, dans ce cas, résoudre les équations de la physique des plasmas à des échelles de plusieurs parsecs peut être difficile, en fonction de la nature de la turbulence. La résolution purement numérique présente des temps de calculs généralement élevés mais une résolution purement analytique est difficile. Cependant il existe un compromis permettant de rester prédictif qui consiste à faire appel à des modèles effectifs de diffusion. Le plus couramment utilisé consiste à partir directement d'une équation de diffusion classique (classique au sens non relativiste) et à la résoudre en tout point de la galaxie. La partie effective de l'équation vient majoritairement du choix de la forme

du coefficient de diffusion.

Il existe plusieurs méthodes pour la résolution de telles équations : la première possibilité est d'opter pour une résolution purement numérique, permettant ainsi d'intégrer des modèles galactiques détaillés prenant en compte de nombreux phénomènes physiques. Cette méthode à l'avantage de pouvoir considérer des coefficients de diffusion ayant des valeurs réalistes. C'est le parti-pris de codes de propagation tel GALPROP ([Moskalenko & GALPROP Team 2013](#)), et DRAGON ([Maccione et al. 2011](#)). Le deuxième choix est de ne pas considérer une équation valide à toutes les échelles énergétiques, on restreint alors le nombre de phénomènes physiques au nombre de processus entrant en jeu dans la gamme d'énergie d'intérêt. Cette approche est utilisée dans certains codes de propagation comme USINE ([Maurin 2011](#)). C'est cette approche que l'on choisit, et ce pour plusieurs raisons :

- Plus l'énergie considérée dans l'équation est élevée et plus l'aspect "classique" de l'équation se fait ressentir : cette équation ne prend pas en compte les phénomènes relativistes, ni la vitesse maximale limite autorisée par les rayons cosmiques : la vitesse de la lumière. Cet aspect seul crée une limitation naturelle à l'utilisation d'une équation de diffusion couvrant toutes les énergies.
- Les expériences de mesures de flux de rayons cosmiques ont de légères différences de normalisation les unes par rapport aux autres (voir la figure 2.1), il est donc difficile de comparer un modèle théorique à de nombreuses expériences, couvrant plusieurs dizaines de décades en énergie.
- En dessous de quelques dizaines de gigaélectronvolts les phénomènes physiques entrant en jeu dans l'équation de diffusion sont nombreux et très mal connus pour nos espèces favorites (protons et héliums). Au sens théorique cela signifie de nombreux modèles possibles (et donc une très grande incertitude théorique) mais également beaucoup de paramètres libres.

De ce fait, tous nos travaux sur le flux de protons concernent des énergies comprises entre le GeV et quelques milliers de TeV. Nous choisissons cet intervalle d'énergie car il correspond à l'intervalle de mesures des expériences PAMELA ([Adriani et al. 2011](#)) et CREAM ([Yoon et al. 2011](#)), qui font apparaître des anomalies dans le spectre du rayonnement cosmique. Ces expériences sont les plus récentes dans cet intervalle (2011 pour la première, 2004 pour la seconde). Notons que pendant la rédaction de cette thèse l'expérience AMS-02 a commencé à publier ses résultats qui seront donc discutés à la toute fin de cet exposé.

Le contexte très particulier des astroparticules implique que les processus physiques à prendre en compte pour modéliser l'interaction d'une particule avec l'environnement galactique sont ceux empruntés à l'astrophysique et à la physique subatomique.

L'astrophysique nous apporte des informations sur :

- La génération du champ magnétique galactique.
- La présence d'un vent convectif issu de l'activité stellaire (nous verrons en détail la forme mathématique que l'on peut lui attribuer).
- Le type de sources de rayonnement cosmique et leur distribution spatiale.

La physique subatomique quant à elle nous renseigne sur la façon dont les espèces disparaissent ou

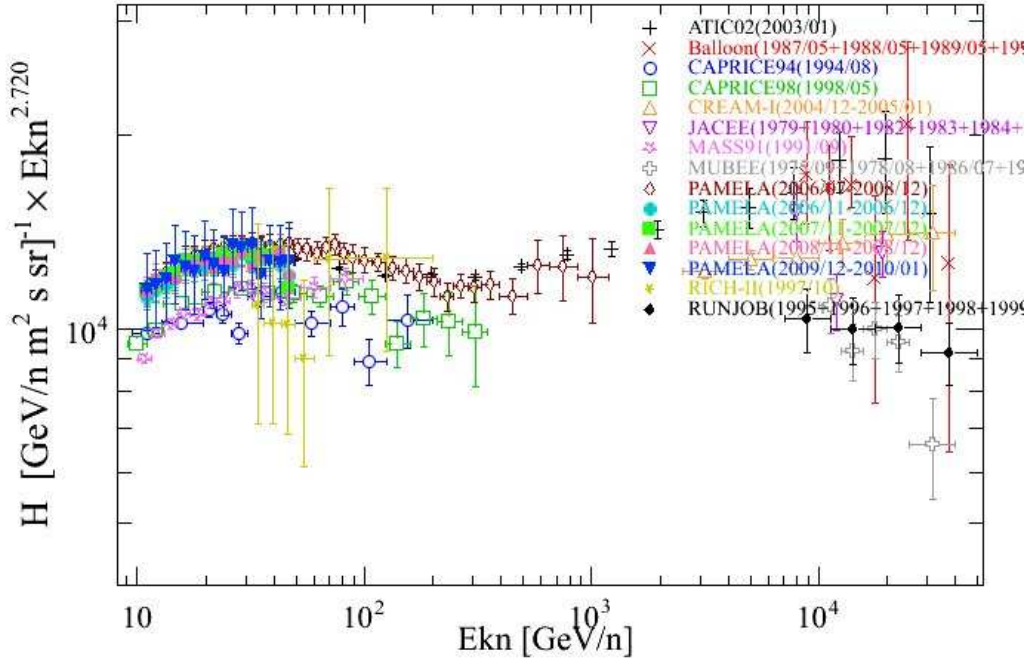


FIGURE 2.1: Mesures du flux de protons depuis 1990 (Maurin et al. 2013)

apparaissent au cours de réactions entre particules. On note par exemple :

- La spallation
- La création de paires
- Le rayonnement de freinage

Les développements récents de l'astrophysique se sont en partie tournés vers l'étude de plasmas magnétisés, qui nous conduira à étudier différents phénomènes :

- La naissance d'une composante turbulente dans le champ magnétique interstellaire
- La diffusion de particules sur un champ magnétique turbulent.
- L'échange d'énergie entre le plasma interstellaire et les particules considérées (pertes ou gains d'énergie).

Nous allons décrire ces phénomènes plus en détails afin d'étudier leur importance dans nos équations. Pour cela nous allons nous intéresser particulièrement à leur importance en fonction de l'énergie.

1 LA PHYSIQUE DU MILIEU INTERSTELLAIRE

1.1 Le disque galactique

La galaxie peut être vue comme étant un disque plat de matière avec un bulbe en son centre. Ce disque n'est pas uniforme, il existe des zones de surdensité : les bras spiraux. Dans sa composition, on retrouve différents objets (étoiles, trous noirs pulsars etc.). La matière présente entre ces objets est appelée le "milieu interstellaire" (noté MIS ou ISM). Le milieu interstellaire est amené à interagir avec les rayons cosmiques et son étendue spatiale est telle que nous ne pouvons à priori pas négliger cette interaction. Nous détaillons la composition du MIS ici.

Le milieu interstellaire représente entre 10% et 15% de la masse totale de la galaxie ([Ferriere 2001](#)). Il est constitué de gaz (donc d'ions, de molécules, d'atomes et d'électrons) et de poussières. On retrouve ces éléments groupés par zones sous forme neutre ou ionisée. On les distingue également par leur température. On peut déterminer les espèces coexistantes dans ce gaz car les différents constituants laissent des signatures particulières qui permettent de les observer mais également de les distinguer. Les photons jouent un grand rôle dans ces signatures, en effet c'est principalement leur interaction avec le milieu interstellaire qui permet de connaître chaque espèce. Les photons reçus sur Terre, exceptés les rayons gamma de ultra-haute énergie, sont majoritairement émis continuellement par les objets compacts de notre galaxie. Une bonne connaissance de ces objets nous permet de déduire la quantité de photons émis mais également leur polarisation. C'est pourquoi on peut retracer leurs interactions avec le milieu interstellaire avec les photons reçus sur Terre. Voici les principales interactions :

- Assombrissement de la lumière : les nuages denses de poussière n'émettent pas nécessairement de rayonnement, néanmoins ceux-ci peuvent avoir tendance à absorber la lumière émise par les étoiles. C'est en fait une absorption sur un large spectre de longueurs d'onde. Notons aussi que dans le domaine visible la poussière interstellaire absorbe et diffuse plus la lumière bleue que la lumière rouge, faisant apparaître les étoiles plus rouges qu'elles ne le sont en réalité.
- Présence de raies d'absorption : certaines molécules ou certains atomes absorbent des longueurs d'onde correspondant à l'une de leur transition énergétique. Par exemple certaines régions absorbent une raie à 1420,4 MHz (plus connue sous le nom de raie à 21 cm). Cette raie correspond à une transition rare de la structure hyperfine de l'atome d'hydrogène. Dans son état fondamental d'énergie les spins du noyau et de l'électron sont de sens opposés. L'excitation de l'atome par l'absorption d'un photon de 21 cm de longueur d'onde entraîne l'alignement des spins. Les régions présentant cette absorption sont donc des régions d'hydrogène atomique, appelées également HI. Ces régions sont distinguées en régions froides (entre 50 K et 1000 K) de quelques dizaines d'atomes par centimètres cubes et chaudes (entre 6000 K et 10000 K) cent fois moins denses. Cependant dans les régions chaudes on distingue peu l'absorption de la raie à 21 cm,

mais plus son émission.

- Raies d'émission : à contrario certaines transitions énergétiques très probables émettent spécifiquement des photons à une longueur d'onde donnée. Par exemple les atomes d'hydrogène émettent une raie à 656,3 nm (appelée également $H\alpha$) lorsqu'ils se dés excitent et que leur électron passe du niveau $n = 3$ au niveau $n = 2$. Cette transition est caractéristique de zones où les atomes d'hydrogènes doivent être ionisés pour pouvoir capturer un électron qui provoque la dés excitation. Ces zones sont appelées régions HII et sont chaudes (autour de 8000 K).
- Polarisation de la lumière : l'interaction entre les photons et des molécules chargées alignées sur le champ magnétique galactique peut modifier la polarisation de la lumière incidente. On observe donc sur Terre des photons polarisés.

Ces observations ont pu mettre en évidence la principale composante du milieu interstellaire : l'hydrogène présent sous différentes formes classées en fonction de la densité, de la température et du degré d'ionisation. Nous avons mentionné l'existence des régions HI et HII, il faut ajouter à ces deux régions les nuages moléculaires contenant principalement de l'hydrogène moléculaire (H_2) mais également d'autres molécules, comme le CO par exemple qui permet de cartographier ces nuages grâce à ses raies caractéristiques. Il existe également un autre type de milieu d'hydrogène ionisé mais sensiblement plus chaud que les régions HII (environ 10^6 K). Pour obtenir de telles températures une solution est de postuler la présence d'ondes de choc dans ce milieu dont la présence est garantie par les vestiges de supernovæ sur lesquelles nous reviendront. Ces régions émettent des rayons X. Toutes ces zones sont résumées dans le tableau 2.1.

TABLE 2.1: Composition du milieu interstellaire (Ferriere 2001)

Composante	T (K)	n (cm^{-3})	fraction volumique	Méthode d'observation
Nuages moléculaires	10-20	10^2 - 10^6	<1%	raies d'émission de H_2 et CO
Froid atomique	50-100	20-50	1%-5%	absorption de la raie à 21 cm
Chaud atomique	6000-10000	0.2-0.5	10%-20%	émission de la raie à 21 cm
Chaud ionisé	~ 8000	0.2-0.5	20%-50%	émission de la raie $H\alpha$
Brûlant ionisé	~ 10^6	~ 0.0065	30%-70%	émission en rayons X

Le milieu interstellaire n'est donc pas homogène mais le tableau 2.1 nous montre qu'il est majoritairement composé d'hydrogène atomique ou ionisé. Les nuages moléculaires représentent une quantité infime et sont en fait extrêmement localisés nous ne les prendrons donc pas en compte dans les modèles. Attention cependant car ils ont une densité élevée, il faut donc toujours garder à l'esprit cette approximation. Notons également que l'interaction des rayons cosmiques avec ces nuages est généralement traitée grâce à la magnétohydrodynamique qui n'est pas au programme de cette thèse. Une étude plus détaillée du milieu interstellaire montre que la deuxième espèce la plus présente est l'hélium pour une quantité d'environ 10% pour 90% de protons. La densité de chaque milieu moyen-

née sur l'ensemble de la galaxie donne environ 1 atome d'hydrogène par centimètre cube dans la galaxie. Au final, dans nos calculs, nous considérerons donc que le milieu interstellaire est constitué d'environ 0.9 protons par cm^{-3} et 0.1 noyau d'hélium par cm^{-3} . Pour finir, il est important de mentionner un paramètre important : notre place dans le Système solaire. En effet nous allons calculer les flux de rayons cosmiques dans la galaxie mais notre intérêt principal est de calculer le flux en lieu et place du Système solaire. Ce dernier est considéré comme étant à une distance comprise entre 7.6 kpc et 8.7 kpc du centre galactique ([Gillessen et al. 2008](#); [Vanhollebeke et al. 2009](#); [Majaess 2010](#)). Cette mesure est assez compliquée pour de nombreuses raisons, notamment du fait qu'il est très délicat d'observer en direction du centre galactique. Nous sommes situés dans le bras spiral d'Orion, qui est en fait un petit morceau de bras spiral (voir figure 2.2). L'incertitude sur notre position rend difficile l'évaluation de notre position exacte par rapport au bord du bras, il n'est pas certain que nous soyons dans le bras ou en dehors. Dans cette thèse nous choisirons la position du Système solaire comme fixe (son incertitude n'a en fait pas un grand rôle pour les calculs de flux) nous le placerons à 8.5 kpc du centre galactique.

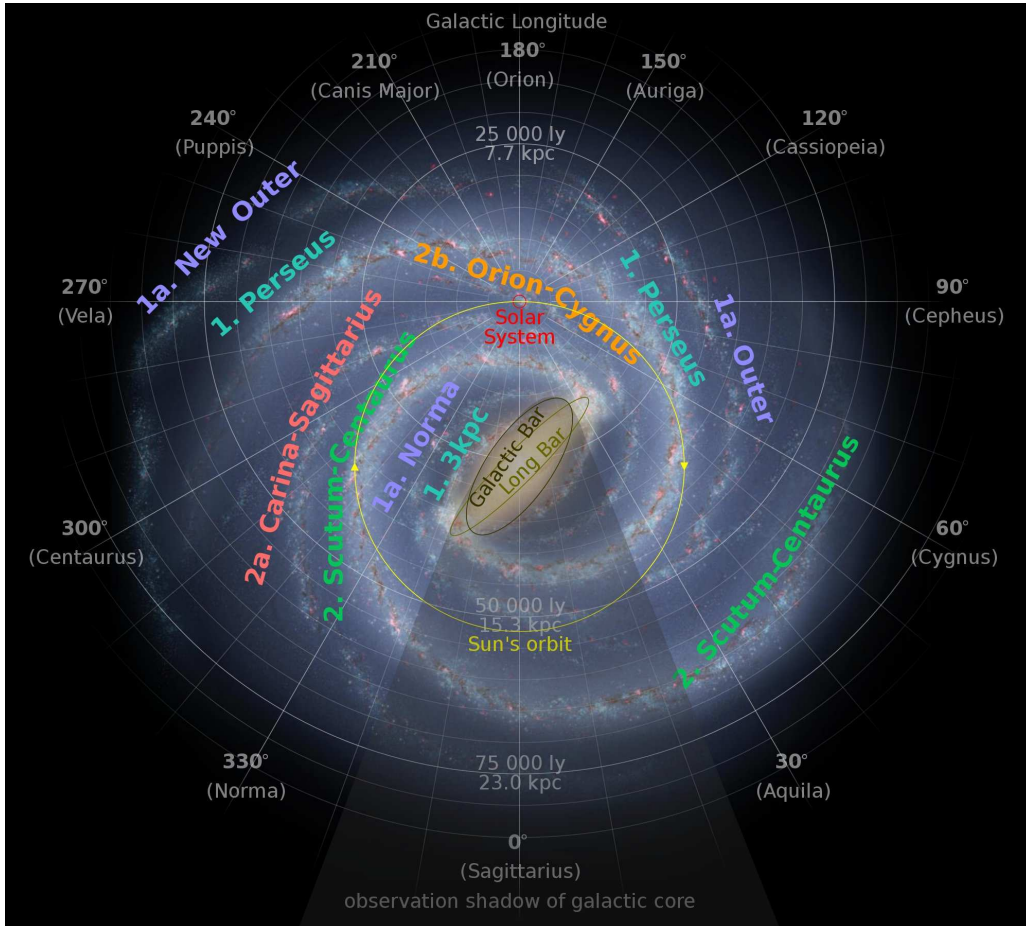


FIGURE 2.2: Schéma des bras spiraux de la galaxie ([Hurt 2013](#))

1.2 Naissance du champ magnétique galactique

Le milieu galactique est baigné dans un champ magnétique ambiant. Son origine est assez incertaine, on ne connaît pas de processus de génération spontanée d'un champ avec cette intensité, donc, pour qu'il soit développé et maintenu, il faut d'abord pouvoir créer un premier champ source, d'une intensité extrêmement faible, de l'ordre de $10^{-12} \mu\text{G}$ (Beck & Wielebinski 2013). Plusieurs phénomènes peuvent être à l'origine de la création de tels champs (Parker 1979)

- La "Biermann battery" : c'est un phénomène qui crée un champ magnétique via l'apparition d'une rotation entre ions et électrons d'un plasma (Biermann 1951)
- L'instabilité Weibel, due à des fluctuations du plasma intergalactique pouvant apparaître en cas d'anisotropie du champ de vitesse du plasma (Weibel 1959)
- Des instabilités dans le plasma intergalactique apparues après la réionisation
- L'effet dynamo
- Un champ intergalactique de grande échelle généré dans l'Univers primordial

Le champ source peut provenir de deux endroits : soit il est généré par la galaxie en elle même, soit il s'agit d'un champ extra-galactique présent au moment de la formation de la galaxie. Cependant cette deuxième hypothèse pose problème : dans ce cas, le champ présent se trouve piégé dans la galaxie et la rotation de cette dernière engendre la rotation des lignes de champ. Cette rotation a tendance à rapprocher des lignes de champ de signe opposés qui peuvent alors se reconnecter. Au final, les reconnexion entre ces lignes de champ auront tendance à unifier le champ dans la galaxie, ce qui va à l'encontre des observations. Il est plus facile de penser que le champ magnétique galactique est créé, maintenu et structuré par la galaxie elle même. Il pourrait être généré à partir du champ éjecté par les premières étoiles ou le premier trou noir, et être ensuite amplifié par effet dynamo (l'effet dynamo consiste à convertir de l'énergie mécanique en énergie magnétique). Cet effet n'a pas forcément besoin d'une rotation globale de la galaxie mais simplement de mouvements turbulents du gaz galactique. La turbulence peut être générée par exemple par des explosions de supernovæ dans la galaxie. Ces phénomènes sont susceptibles de générer un champ de quelques microgauss.

Plusieurs mesures ont permis de mettre en évidence la présence d'un champ magnétique :

Les mesures de rotation de la polarisation (l'effet Faraday) : en présence d'un champ magnétique, la polarisation de la lumière émise par un objet subit une rotation. L'angle de rotation est proportionnel à l'amplitude du champ magnétique le long de la ligne de visée. On sépare cet effet en deux, premièrement la mesure directe de la variation de l'angle de polarisation. Cette variation est égale à (Beck & Wielebinski 2013)

$$\theta = 8.12 \cdot 10^3 \lambda^2 \int_0^\ell N_e B_{\parallel} dl \quad (2.1)$$

où θ est la rotation de polarisation en radians, ℓ en parsecs, N_e la densité de particules chargées en m^{-3} . La quantité généralement mesurée est θ/λ^2 , on l'appelle la mesure de rotation. Le signe

du résultat informe également sur la direction du champ magnétique : si il est négatif, les lignes de champ s'éloignent de l'observateur. Beaucoup de sources galactiques, par exemple les pulsars, émettent des signaux polarisés linéairement en ondes radio. Comme nous venons de le voir la mesure de l'effet Faraday permet de calculer $\int_0^l N_e B_{\parallel} dl$. D'autre part, la mesure de dispersion des pulsars (qui correspond à la largeur en fréquence du pic d'émission d'un pulsar) nous renseigne directement sur la valeur de $\int N_e dl$. En combinant les deux, et en effectuant la mesure sur plusieurs fréquences, on obtient le long de la ligne de visée une très bonne estimation de $\langle B_{\parallel} \rangle$. Cette observation est délicate car elle est associée à plusieurs phénomènes de dépolarisation. Lorsque l'on veut utiliser cet effet pour mesurer des sources étendues contenant un champ magnétique, des électrons cosmiques et des électrons thermiques, alors l'effet Faraday n'est plus le même dans toute la source. Il y a superposition de plusieurs polarisations, provenant chacune d'une région de la source, l'effet initial est donc faussé. En présence d'un champ magnétique turbulent, le procédé est le même, en chaque endroit de la source l'effet Faraday est différent. Ces deux effets ont pour nom dépolarisation Faraday, il permettent notamment de déterminer la nature du champ magnétique présent à l'endroit de mesure. On mesure par cette méthode des champs magnétiques galactiques de l'ordre de $\sim 2 \times 10^{-5}$ G.

Certains gaz interstellaires sont constitués de grains de poussière chargés de forme allongée. De ce fait, ils ont tendance à s'aligner le long des lignes de champ magnétique. Ces grains, en fonction de leur orientation, auront tendance à occulter plus ou moins certaines polarisations de la lumière des étoiles présentes derrière eux. Grâce à ces observations il a été montré que la composante uniforme du champ magnétique galactique est dirigé selon le bras local dans notre galaxie.

Pour mesurer l'amplitude du champ magnétique une bonne observation vient de l'effet Zeeman. C'est un effet quantique : en présence d'un champ magnétique, l'alignement des spins des constituants de l'atome avec le champ magnétique présent donne lieu à la présence de nouveaux niveaux énergétiques hyperfins. C'est le cas pour la raie à 21cm de l'hydrogène qui est, comme nous l'avons vu, directement en lien avec le spin de ses constituants. Dans le cas d'un champ magnétique fort, la raie est subdivisée en plusieurs raies, si le champ est faible, on observe plus simplement un élargissement de la raie. La raie à fréquence ν_0 est séparée en fréquences ([Longair 2011](#))

$$\nu_0 = \pm \frac{e B_{\parallel}}{4\pi mc} \quad (2.2)$$

Cet effet a d'abord été mis en évidence en 1908 sur le Soleil par George Ellery Hale (1868 - 1938) ([Hale 1908](#)). Bien sûr cet effet rend compte surtout du champ magnétique présent dans les nuages d'hydrogène, et les mesures rapportent des champs magnétiques de l'ordre de 10^{-4} G à 10^{-3} G, soit 10 fois plus intenses que dans la galaxie.

On complète ces observations avec les mesures d'émission radio dans la galaxie, trace de l'effet synchrotron de l'interaction des électrons avec le champ magnétique galactique ([Ferrière 2011](#)). Cette observation ne permet pas de donner de valeur précise de l'amplitude du champ mais une fourchette

qui colle avec les autres observations.

De plus ces mesures révèlent la présence de fluctuations dans le champ magnétique, un résumé des méthodes de mesures est présenté dans la table 2.2.

TABLE 2.2: Mesures du champ magnétique (Beck & Wielebinski 2013)

Composante du champ	Notation	Propriété	Mesure
Total	B	3D	Rayonnement synchrotron
Dans le plan céleste	B_{\perp}	2D	Rayonnement synchrotron
Turbulent dans le plan céleste	δB_{\perp}	2D	Rayonnement synchrotron dépolarisé Depolarisation Faraday
Turbulent le long de la ligne de visée	δB_{\parallel}	1D	Depolarisation Faraday
Ordonné perpendiculaire à la ligne de visée	$B_{\text{ord},\perp}^2 = B_{\text{an},\perp}^2 + B_{\text{reg},\perp}^2$	2D	Synchrotron polarisé polarisation optique
Anisotropique perpendiculaire à la ligne de visée	$B_{\text{an},\perp}$	2D	Synchrotron polarisé polarisation optique
Régulier perpendiculaire à la ligne de visée	$B_{\text{reg},\perp}$	2D	Synchrotron polarisé polarisation optique
Régulier parallèle à la ligne de visée	$B_{\text{reg},\parallel}$	1D	Rotation Faraday effet Zeeman

Toutes ces mesures sont appliquées aux galaxies voisines pour essayer de cartographier leur champ magnétique mais aussi dans le voisinage du Système solaire dans notre galaxie, cette dernière mesure est reportée sur la figure 2.3. En comparant cette figure avec une carte de la galaxie on peut voir que le champ magnétique est effectivement plus intense dans les bras spiraux. Sur la figure 2.4 on peut voir une cartographie du champ de M51. Le champ semble effectivement situé dans les bras spiraux, de plus il semblerait que les lignes de champ soit très parallèles au plan galactique vers le centre galactique et perpendiculaire loin du centre.

Toutes ces observations nous poussent à considérer l'existence d'un halo magnétique dans la galaxie. La forme de ce halo est d'une importance capitale car les rayons cosmiques interagissent très fortement avec le champ magnétique. Plus particulièrement, ils sont confinés par le champ magnétique. La forme de ce halo dicte donc l'échappement des rayons cosmiques de la galaxie. Cependant, on ne peut pas directement observer l'intégralité du champ magnétique de la Voie Lactée comme on le fait pour les galaxies voisines, on ne connaît donc pas précisément son étendue. Même si des modèles peuvent être construits prenant en compte le champ magnétique local, l'étendue du champ magnétique selon l'axe vertical de notre galaxie est encore inconnu. Sa forme exacte n'est pas non plus connue, il semblerait que son étendue soit plus importante au centre de la galaxie que sur les bords. La forme du halo étant incertaine, nous considérerons dans cette thèse une forme cylindrique, avec le rayon du cylindre concordant avec le rayon de la galaxie. Cette approximation est la plus couramment utilisée dans les modèles de propagation.

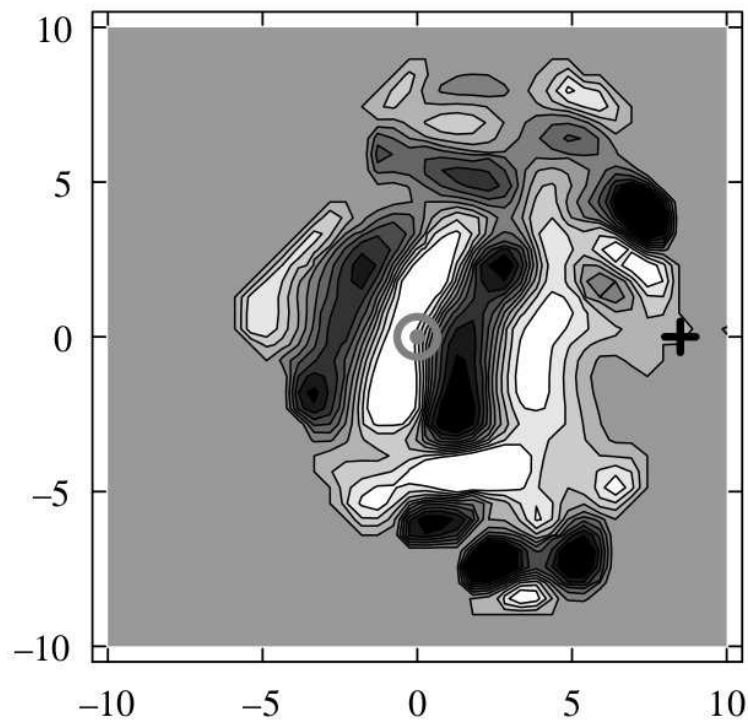


FIGURE 2.3: Cartographie du champ magnétique local (Beck & Gaensler 2004)

1.3 Le vent convectif

La galaxie est un système très dynamique, c'est pourquoi il est difficile de considérer une interface statique à la limite du disque de matière (Maurin 2001), il faut en fait considérer un équilibre entre le gaz du milieu interstellaire, les rayons cosmiques et la pression du champ magnétique. Plusieurs arguments appuient l'existence de cette dynamique (Veilleux et al. 2005) : on observe certains nuages assez éloignés du plan galactique se déplaçant avec une vitesse le long de la hauteur de la galaxie très élevée, certains vers le plan galactique d'autres dans la direction opposée. Pour essayer d'expliquer ces vitesses, on peut postuler l'existence d'un vent galactique, auquel cas les gaz chauds s'éloignent du disque galactique portés par la convection, puis retombent vers le disque sous l'effet de la gravité. Certaines structures dans la galaxie suggèrent également l'éjection de gaz hors du halo, comme les cheminées formées par les superbulles (les superbulles sont des structures galactiques caractérisées par une faible densité de gaz, elles seraient formées par des explosions de supernovæ). De plus, le vent galactique semble aujourd'hui un élément essentiel à l'histoire des galaxies. Sans sa présence les modèles théoriques de galaxie conduisent à des galaxies avec trop de matière. Un tel vent est observable sur les galaxies voisines, mais il est plus délicat de l'observer sur notre propre galaxie. D'autre part il est possible qu'il ne soit pas dû à la seule dynamique stellaire mais que les rayons cosmiques aient un rôle important à jouer dans sa formation. En effet nous allons voir dans la section 1.5 (page 34) que les équations de diffusion des rayons cosmiques dans le milieu interstellaire font

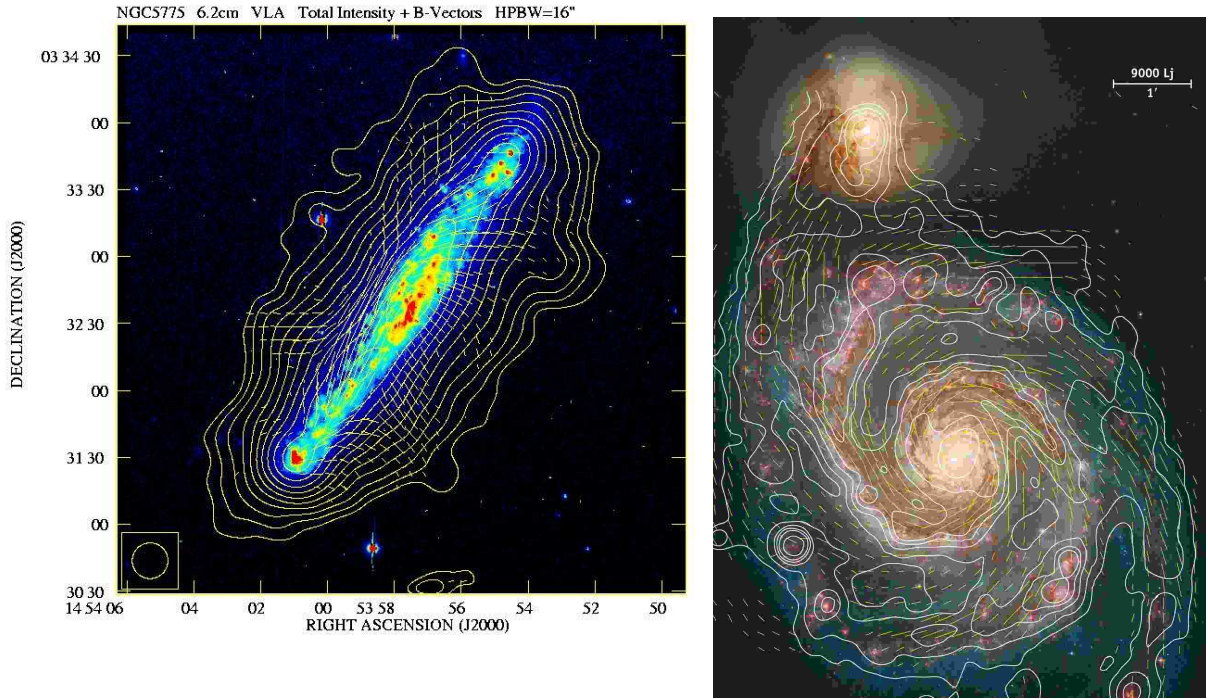


FIGURE 2.4: Cartographie des vecteurs polarisation de la galaxie spirale M51 (Berkhuijsen et al. 2003; Fletcher et al. 2011)

naturellement apparaître un terme de convection. Les origines possibles de cette convection la rend difficile à modéliser, mais de manière générale, les observations et simulations tendent à montrer que la vitesse du vent convectif augmente avec la distance au plan galactique (Booth et al. 2013). La convection est directement liée à l'activité des étoiles massives dans la galaxie, on peut donc admettre la présence d'une dépendance radiale du vent convectif. Cependant, nous montrerons plus tard (voir 4 (page 151)) que le vent convectif est localement dominé par les effets de diffusion, il est donc admettable de ne pas considérer dans les équations la dépendance radiale. En notant $V_c(z)$ la valeur de ce vent en fonction de la distance au disque galactique z , la modélisation la plus simple qu'il est possible de choisir est

$$V_c(z) = v_c \operatorname{sgn}(z)$$

avec

$$\operatorname{sgn}(z) = +1 \text{ si } z > 0 \quad (2.3)$$

$$\operatorname{sgn}(z) = -1 \text{ si } z < 0 \quad (2.4)$$

Dans cette thèse pour simplifier le problème c'est celle que nous choisirons. Nous verrons plus tard, en section 4 (page 151) que son rôle n'est pas dominant dans la majorité des cas, cette approximation reste donc correcte.

1.4 Les pertes d'énergie

Il existe toute une liste d'interactions susceptibles de faire perdre aux rayons cosmiques de l'énergie. En effet, ce sont des particules chargées se propageant dans un milieu de particules également chargées, la plupart de ces pertes proviennent donc d'interactions électromagnétiques, avec des phénomènes comme l'ionisation ou le rayonnement de freinage (Longair 2011; Rybicki & Lightman 1986). Il est difficile d'évaluer simplement ces pertes d'énergie car elles sont en lien avec la quantité de matière traversée par les rayons cosmiques. En astroparticule, on utilise souvent la notion de grammage, c'est-à-dire la densité moyenne de matière traversée par un rayon cosmique dans la galaxie. Ici nous contournerons le problème en utilisant un temps caractéristique appelé temps caractéristique d'échappement. Ce temps que nous verrons plus en détail plus tard est donné par

$$\tau_{\text{esc}} \sim \frac{L^2}{D}.$$

Avec D le coefficient de diffusion. On prendra une valeur caractéristique du coefficient de diffusion et une hauteur de halo de 4 kpc, on a (Taillet 2010)

$$\tau_{\text{esc}} \sim 100 \text{ Myr}$$

Il s'agit du temps pour lequel le processus de diffusion devient moins efficace que la perte des rayons cosmiques par échappement de la galaxie de hauteur de halo L . De plus introduisons le rayon classique de l'électron r_e donné par

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2} = 2.818 \times 10^{-13} \text{ cm.}$$

ou encore

$$r_e^2 c = 7.52 \times 10^{-2} \text{ cm}^3 \cdot \text{Myr}^{-1}$$

Les pertes par ionisation

Les pertes par ionisation se produisent lorsqu'un noyau ionise le milieu interstellaire le long de sa trajectoire. L'effet de l'ionisation dépend du traitement relativiste ou non de la particule. La différence a une importance car elle change la tendance des pertes énergétiques en fonction du temps. Le calcul classique des pertes par ionisation passe par la formule de Bethe-Bloch. Dans le cas relativiste, la formule est donnée par (Beringer et al. 2012)

$$-\frac{dE}{dt} = 4\pi r_e^2 c m_e c^2 Z^2 z_s n_s \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2\gamma^2 m_e c^2 \beta^2}{I} \right) - \beta^2 \right] \quad (2.5)$$

Ici I est la moyenne des potentiels d'ionisation et d'excitation de la cible. Il vaut environ $I \sim 10 \text{ eV} \times A$. z_s et n_s indiquent respectivement la charge et la densité de la cible et A le nombre de nucléons. Dans

tous nos calculs on travaillera généralement au-delà de la dizaine de GeV, et les cibles sont de l'hydrogène et de l'hélium. Pour se faire une idée nous utilisons l'approximation ultra-relativiste (correcte à une dizaine de GeV). Ici la cible est le milieu interstellaire (composé uniquement d'hydrogène en première approximation). À une énergie cinétique de 10 GeV par nucléons, γ vaut environ 11. Nous avons donc

$$-\frac{dE}{dt} \sim 6 \times 10^{-3} \sim r_e^2 c n_s \left[\ln \left(\frac{2 \times 10^2 0.5 \times 10^{-3}}{10^{-9}} \right) - \beta^2 \right] \sim 0.006 \sim r_e^2 c n_s \quad (2.6)$$

Pour être rigoureux il faudrait intégrer cette équation sur l'énergie mais nous allons voir que les pertes sont telles que l'approximation reste correcte. On cherche à connaître ces pertes pendant le temps $\tau_{\text{esc}} \sim 100 \text{ Myr}$. Pendant ce temps l'énergie perdue par ionisation est environ

$$\Delta E \sim 100 \times 0.075 \times 0.075 \sim 0.6 \text{ GeV}.$$

L'effet est encore moins important à haute énergie, car le temps d'échappement s'accroît beaucoup plus vite que l'efficacité des pertes énergétiques. Aussi nous pouvons nous permettre de ne pas prendre en compte les pertes par ionisation.

Pertes coulombiennes

Les pertes coulombiennes sont issues du freinage des rayons cosmiques par les ions du milieu interstellaire. Dans les plasmas interstellaires ce freinage est essentiellement dû à la diffusion des cosmiques sur les électrons thermalisés du milieu. Les pertes d'énergies associées s'expriment dans ce cas par

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dt} &= -4\pi r_e^2 c m_e c^2 Z^2 n_e \ln \Gamma \frac{\beta^2}{x_m^3 + \beta^3} \\ x_m &= \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{2k_b T_e}{m_e c^2}} \\ \ln \Gamma &\sim 45 \text{ pour nos ordres de grandeur} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dans notre cas la température T_e des électrons du milieu interstellaire est de l'ordre de 10^4 K et leur densité moyenne $n_e \sim 0.33 \text{ cm}^{-3}$ (Nordgren et al. 1992). M est la masse du noyau cible. On procède de la même manière que précédemment pour chercher un ordre de grandeur. Cette fois ci, la constante de Boltzmann exprimée en GeV.K^{-1} étant de l'ordre de 10^{-13} nous permet de négliger le terme x_m . Il en résulte :

$$\Delta E \sim 100 \times 0.006 \times 0.033 \times 45 \sim 1.48 \times 10^{-3} \text{ GeV}.$$

L'effet est donc encore moins important dans le cadre des pertes coulombiennes.

Les autres effets

On dénote beaucoup d'autres effets radiatifs ou collisionnels mais nous ne les dénombrons pas ici. En effet soit ils s'appliquent exclusivement aux électrons (qui ne sont pas le propos de cette thèse), comme l'effet Compton inverse par exemple, soit ils sont encore moins présents entre le GeV et le TeV (comme le rayonnement synchrotron par exemple) (Maurin 2001). Toutes les pertes d'énergies par processus radiatifs ou collisionnels sont donc complètement négligeables dans le cadre de cette thèse, il nous sera donc inutile de les prendre en compte. Néanmoins la perte de matière par interaction proton proton n'est pas négligée et sera discutée dans la section 1.6.

1.5 Les échanges d'énergie avec le plasma

Nous sommes obligés ici de nous avancer sur la section 3.3 (page 58). Les rayons cosmiques constituent une phase physique que l'on appelle un plasma, cette phase correspond à un état ionisé de la matière baignée de champ magnétique. Dans une telle phase, plusieurs phénomènes physiques connus peuvent apparaître et transmettre de l'énergie aux particules se propageant dedans. Le phénomène le plus connu est l'apparition d'ondes d'Alfvén de vitesse V_a . Ces ondes apparaissent dans les plasmas perturbés, dans le cas où la perturbation est faible, ce qui est souvent le cas pour les plasmas astrophysiques. Via une interaction ondes-particules, ces ondes transmettent ensuite leur énergie aux rayons cosmiques. Le terme de gain d'énergie associé provient du fait que son apparition dans les équations est similaire à un phénomène de diffusion dans l'espace des énergies. L'équation (2.106) nous montre l'influence de cet effet dans l'équation de diffusion. Le terme associé est donné par :

$$\frac{\partial N}{\partial t} \sim \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(p^2 A_2 \frac{\partial N}{\partial p} \right) \quad (2.8)$$

Ce terme correspond à la diffusion de l'impulsion issue des ondes d'Alfvén (Blandford & Eichler 1987). Il est possible de simplifier l'écriture du processus pour le réécrire sous une forme

$$\frac{\partial N}{\partial t} \sim \frac{\partial}{\partial E} \left(D_{EE} \frac{\partial N}{\partial E} \right) \quad (2.9)$$

Avec

$$D_{EE} = \frac{2}{9} V_a^2 \frac{E^2 \beta^4}{D(E)} \quad (2.10)$$

Les coefficients de diffusion peuvent être vus comme un écart quadratique moyen, aussi pour une énergie de 10 GeV, en prenant une vitesse d'Alfvén typique (de l'ordre de 50 km.s⁻¹) on trouve pour un proton un coefficient D_{EE}

$$D_{EE} \sim 1.28 \text{ GeV}^2 \cdot \text{Myr}^{-1}.$$

Au bout d'1 Myr (qui est le temps caractéristique d'échappement associé à un proton de 100 GeV), on peut estimer que l'écart-type moyen de la variation d'énergie de la particule due à cette diffusion est de l'ordre du pourcent, donc nous la négligerons. Cependant il s'agit encore une fois d'un modèle simplifié, certaines théories prévoient une contribution de cet effet plus conséquente. Une étude exhaustive de l'effet de réaccélération peut se trouver dans (Cho & Lazarian 2006), les auteurs précisent notamment que dans le halo magnétique, la densité étant diminuée, la vitesse d'Alfvén augmente, ce qui renforce la contribution de la réaccélération. De plus, il faut aussi garder à l'esprit que la frontière en énergie à partir de laquelle la réaccélération semble intervenir reste assez floue (Yan & Lazarian 2008).

D'autre part l'équation (2.106) fait apparaître deux termes d'échanges énergétiques avec le plasma, le premier correspond aux gains d'énergie par convection :

$$\frac{\partial N}{\partial t} \sim -\frac{1}{4p^2} \frac{\partial(p^2 v A_1)}{\partial p} \frac{\partial N}{\partial z} \quad (2.11)$$

Le deuxième correspond à des pertes adiabatiques :

$$\frac{\partial N}{\partial t} \sim \frac{v}{4} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial p} \quad (2.12)$$

Ces échanges d'énergie sont dûs à la génération de mouvements de convection et d'étendue de l'espace de diffusion. Ils sont gouvernés par le coefficient A_1 appelé taux de décélération adiabatique. Dans notre problème la zone de diffusion étant à l'équilibre et spatialement fixe, la décélération adiabatique n'a pas d'effet. Les effets convectifs seront étudiés par la suite. Nous verrons qu'à partir de quelques dizaines de GeV ces effets peuvent être négligés, c'est pourquoi nous ne prendrons pas en compte ici les phénomènes de pertes énergétiques provenant de la convection.

1.6 La physique nucléaire

Les rayons cosmiques étant en interaction avec le milieu interstellaire, il faut prendre en compte toutes les réactions nucléaires possibles entre le gaz interstellaire et les rayons cosmiques. Dans cette thèse nous nous intéressons aux protons et à l'hélium. Les protons ainsi que les noyaux d'hélium 3 et 4 sont stables. Les autres isotopes de l'hélium ont des demi-vies suffisamment courtes pour être complètement négligés dans la propagation. Les deux espèces étant stables on ne considère donc pas les effets de désintégration, ou même de radioactivité β . En fait, étant donné les espèces que nous traitons, les seules réactions que nous avons à considérer sont les spallations sur les noyaux du milieu interstellaire. Lors de la spallation, la collision du noyau père sur le noyau fils produit deux noyaux différents, le noyau père est donc détruit. Nous avons approximé ce milieu comme étant constitué de 0.9 noyau d'hydrogène par cm^3 et 0.1 noyau d'hélium par cm^3 (Ferriere 2001), nous utiliserons donc cette densité pour construire les sections efficaces de spallation des rayons cosmiques sur des

noyaux du MIS. Il existe néanmoins un problème à la détermination de ces sections efficaces. En effet les énergies en jeu vont du GeV à environ 1000 TeV. Les sections efficaces correspondantes ne peuvent pas être entièrement étudiées en accélérateur (rappelons à toutes fins utiles que l'accélérateur de particules le plus puissant, le LHC ne pourra pas aller au-delà de 14 TeV dans son centre de masse). Il existe donc plusieurs méthodes pour estimer ces sections efficaces. Une méthode empirique consiste à chercher les sections efficaces en observant les collisions de protons dans les collisionneurs. La section efficace est alors déterminée et prolongée par extrapolation. De manière semi-empirique, certains auteurs essaient de trouver des similitudes entre sections efficaces en fonction du nombre de protons et de neutrons des noyaux père/fils. Ces similitudes permettent de construire des fonctions semi-empiriques plus génériques que les formes empiriques, et trouver ainsi les sections efficaces de noyaux très instables difficiles à manipuler en laboratoire. Pour finir, il est possible de construire des simulations Monte-Carlo de collisions de noyaux pour ajuster finement les sections efficaces. Dans le cadre de notre problème les sections efficaces entre le GeV et le TeV sont quasiment constantes, au delà du TeV elles varient doucement avec l'énergie mais nous verrons que pour ces énergies le processus de diffusion domine très largement les spallations. La paramétrisation que nous retenons ici est donnée directement par (Beringer et al. 2012) et permet une approximation de la section efficace proton-proton.

$$\sigma_{pp} = 48 + 0.522 \log(p/A)^2 - 4.51 \log(p/A) \text{ mb} \quad (2.13)$$

Avec p en GeV. Pour compléter cette section efficace on utilise un coefficient multiplicatif semi-empirique qui relie la section efficace d'une réaction avec protons aux sections efficaces de réaction avec hélium. Ce terme est donné par (Norbury & Townsend 2007)

$$S_{\text{corr}} = 4^{2.2/3} \quad (2.14)$$

Enfin, pour connaître le taux de destruction d'une espèce donnée par spallation, on multiplie la section efficace par la vitesse de la particule et la densité de cibles. On note le tout Γ

$$\Gamma_p = n v \sigma \quad (2.15)$$

Dans le milieu interstellaire nous avons $n = 0.9 n_p + 0.1 n_{\text{He}}$ donc

$$\Gamma_p = v (0.9 n_p \sigma_{pp} + 0.1 n_{\text{He}} \sigma_{p \text{ He}}) = v (0.9 n_p + 0.1 n_{\text{He}} S_{\text{corr}}) \sigma_{pp} \quad (2.16)$$

De même, pour l'hélium on a

$$\Gamma_{\text{He}} = v (0.9 n_p + 0.1 n_{\text{He}} S_{\text{corr}}) \sigma_{pp} S_{\text{corr}} \quad (2.17)$$

Et donc le taux de noyaux détruits par seconde par la spallation à une énergie, un temps, et une position donnés est ΓN . Ces sections efficaces n'étant pas mesurées pour des énergies de plusieurs

TeV elles présentent de incertitudes théoriques. Ces erreurs ne sont pas à négliger, de manière générale les incertitudes sur les sections efficaces d'interaction nucléaires sont des mesures relativement âgées et entraînent des erreurs théoriques importantes (Maurin et al. 2010).

1.7 La modulation solaire

Nous l'avons évoqué, une grande partie de la complexité du problème de propagation du rayonnement cosmique vient de l'interaction entre les particules chargées et le champ magnétique. Or les observations du Soleil sur plusieurs bandes de fréquences ont permis de mettre en évidence la présence d'un champ magnétique dans l'environnement solaire ajouté à de nombreux jet de plasmas en provenance du Soleil. L'interaction des rayons cosmiques galactiques avec l'environnement solaire est appelé modulation solaire. Cette modulation dépend du vent solaire qui est un système dynamique complexe. La difficulté vient notamment du fait que l'activité solaire varie au cours du temps, le flux de rayons cosmiques reçus en haut de l'atmosphère est donc influencé au cours du temps par cette variation. Pour simplifier les effets de la modulation on utilise souvent l'approximation "force field". On considère que les rayons cosmiques du milieu interstellaire perdent de l'énergie dans cette interaction, le flux total et l'énergie des particules sont donc décalés. Une telle approximation a l'avantage de ne contenir qu'un seul paramètre libre Φ appelé potentiel de modulation solaire (de l'ordre de la centaine de MV). L'activité solaire est globalement périodique, répartie en cycles d'une période d'environ 11 ans (les périodes varient en fait entre 8 et 15 ans) et en cycles d'environ 22 ans. Le potentiel de modulation est donc variable au cours du temps. Les décalages prédits par l'approximation force-field sont (Taillet 2010)

$$\begin{aligned} E_{\text{TOA}} &= E_{\text{IS}} - \frac{Z \Phi}{A} \\ \frac{\text{Flux}_{\text{TOA}}(E_{\text{TOA}})}{\text{Flux}_{\text{IS}}(E_{\text{IS}})} &= \left(\frac{p_{\text{TOA}}}{p_{\text{IS}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Z indique la charge du noyau d'intérêt et A son nombre de nucléons. Les indices TOA et IS indiquent respectivement "top of atmosphère" et "interstellaire" soit le lieu de détection pour les expériences satellites et le comportement des cosmiques avant d'être soumis au vent solaire. Les barres d'erreurs issues des mesures sont aussi modulées et les démoduler est plus délicat. C'est pourquoi les expériences présentent souvent leur résultats sous la forme modulée. Dans notre cas, nous travaillons généralement autour de la dizaine ou de la centaine de GeV. Dans ce cas dans l'expression (2.18) on a $E_{\text{TOA}} \sim E_{\text{IS}}$ et donc la modulation solaire n'a pas d'effet sur les résultats.

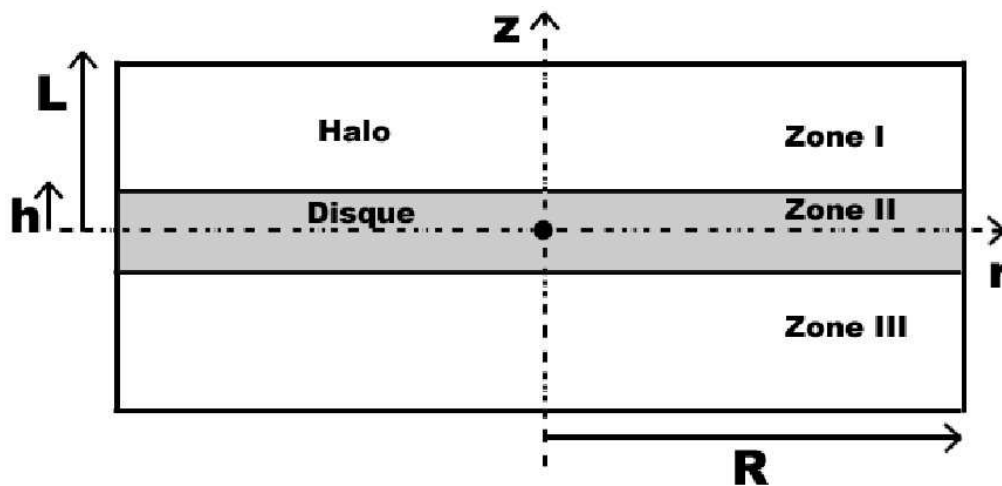


FIGURE 2.5: La géométrie de la galaxie. La zone I est identique à la zone III, cependant certains calculs peuvent éventuellement briser la symétrie vis-à-vis de l'axe r .

1.8 Les symétries de la galaxie

Nous essayons ici de ramener la galaxie à une géométrie simple. De prime abord on peut être tenté de prendre une sphère pour modéliser le halo magnétique mais la présence d'un disque de matière quasi-cylindrique incite l'utilisation d'un cylindre, donc le halo diffusif est choisi cylindrique. Le rayon du cylindre est déterminée par l'étendue du disque de matière de notre galaxie, soit $R = 20$ kpc. On sépare ce cylindre en deux zones : une zone où le disque de matière est présent, d'une demi-épaisseur $h = 100$ pc, correspondant environ à l'épaisseur du MIS au niveau de la Terre. L'étendue du halo magnétique par contre n'est pas mesurée, on le note L et sa valeur moyenne est estimée à 4 kpc. Dans la plupart des calculs comme $h \ll L$ on considérera le disque galactique comme étant infiniment mince. On testera cette approximation pour vérifier sa validité. Contraindre la taille de ce halo est un des enjeux des problèmes modernes sur la propagation des rayons cosmiques. C'est pourquoi nous y reviendrons souvent dans cette thèse. Le Système solaire est positionné dans la galaxie à une distance d'environ 8.5 kpc. La galaxie est donc un cylindre de hauteur L et de rayon R , avec une zone de hauteur h à l'intérieur. Cette géométrie est schématisée sur la figure 2.5. C'est en fait une configuration de travail assez répandue est proposée par (Jones 1999). Ce modèle a déjà permis de contraindre des paramètres de propagation et il ne semble donc au premier abord pas utile de le changer radicalement.

2 L'ACCÉLÉRATION DES RAYONS COSMIQUES

Le spectre du rayonnement cosmique implique de trouver dans la galaxie des objets ou des phénomènes suffisamment énergétiques pour pouvoir accélérer les rayons cosmiques jusqu'à 10^{20} eV. De plus, on cherche un phénomène en loi de puissance pour essayer de reproduire le spectre observé du rayonnement cosmique. Pour finir nous verrons dans cette thèse que la loi de puissance recherchée doit posséder un indice spectral proche de 2. La problématique est séparée en trois points :

- Quels sont les mécanismes qui peuvent porter les rayons cosmiques à de telles énergies ?
- Quels objets de la galaxie abritent de tels mécanismes ?
- Comment injectent-ils les rayons cosmiques dans la galaxie ?

Nous abordons ici brièvement ces trois points.

2.1 Les mécanismes d'accélération

Le premier à avoir proposé un mécanisme permettant d'accélérer les rayons cosmiques avec une loi de puissance est Enrico Fermi en 1949, on appelle donc le processus associé "accélération de Fermi". Il s'agit simplement d'une accélération par changement de référentiel. Dans ce type d'accélération les rayons cosmiques rencontrent un objet extrêmement massif possédant une certaine vitesse. Les particules rebondissent sur cet objet de façon complètement élastique. Ce genre de collision peut être apparentée à la rencontre des rayons cosmiques avec un nuage de gaz dense par exemple, ou encore des ondes de choc. L'énergie du nuage ou de l'onde de choc est alors transférée aux rayons cosmiques. Pour une accélération efficace, il faut que la particule puisse entrer plusieurs fois en collision avec ce genre d'objets. C'est justifiable en considérant une répartition statistique des nuages de gaz, cependant en fonction de la vitesse propre du nuage par rapport à la vitesse incidente de la particule, le gain d'énergie n'est pas systématique. Détaillons de façon simple ce mécanisme :

On considère un rayon cosmique d'impulsion \vec{p} et d'énergie E dans le référentiel du laboratoire. On considère un mur de vitesse V le long de l'axe x et de masse infinie, sa vitesse ne changera donc pas au cours de la collision. Dans le référentiel propre du mur, la particule arrive avec une incidence θ . Le quadri-vecteur énergie-impulsion de la particule dans le référentiel du laboratoire est noté $\mathbf{P} = (E/c, \vec{p})$ et dans le référentiel du mur il est noté $\mathbf{P}' = (E'/c, \vec{p}')$.

Dérivation du spectre énergétique d'injection

En utilisant la transformation de Lorentz on a

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - V p_x) \\ p'_x &= \gamma(p_x - \frac{VE}{c^2}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec

$$\begin{aligned} p_x &= p \cos \theta \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \text{ le facteur de boost} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Comme la vitesse du mur ne change pas au cours du choc son énergie E' ne change pas, et donc par conservation de l'énergie, l'énergie de la particule après le choc dans le référentiel propre du mur est la même que celle avant le choc. Pour l'impulsion on a $p_{x,\text{avant}} = -p_{x,\text{après}}$ et $p_{x,\text{avant}} = p_x = -p \cos \theta = E v / c \cos \theta$. On note \mathbf{p}'' le quadri-vecteur énergie-impulsion de la particule dans le référentiel du laboratoire après le choc. On a

$$E'' = \gamma(E' + V p'_{x,\text{après}}) = \gamma(E' - V p'_{x,\text{avant}}) \quad (2.21)$$

En insérant (2.19) dans cette équation on trouve

$$E'' = \gamma^2 E \left(1 + \frac{2Vp \cos \theta}{E} + \frac{V^2}{c^2} \right) \quad (2.22)$$

Et $P/E = (\gamma m v)/(\gamma m c^2) = v/c^2$ donc

$$E'' = \gamma^2 E \left(1 + \frac{2Vv \cos \theta}{c^2} + \frac{V^2}{c^2} \right) \quad (2.23)$$

Le changement d'énergie lors de la collision est donc

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= E'' - E = \gamma^2 E \left(1 + \frac{V^2}{c^2} - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2Vv \cos \theta}{c^2} \right) \\
 \Delta E &= \gamma^2 E \left(1 + \frac{V^2}{c^2} - \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) + \frac{2Vv \cos \theta}{c^2} \right) \\
 \Delta E &= \gamma^2 E \left(2 \frac{V^2}{c^2} + \frac{2Vv \cos \theta}{c^2} \right) \\
 \Delta E &= \gamma^2 E \left(2 \frac{V^2}{c^2} - \frac{2\vec{V} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Ce transfert d'énergie dépend de l'orientation de v par rapport à V , en effet, si v et V sont dans le même sens, la particule perdra de l'énergie. Supposons maintenant que la particule rencontre plusieurs murs, on va donc moyenner la distribution sur l'angle d'incidence θ . On suppose qu'il est distribué uniformément, usuellement une telle distribution est modélisée avec $\cos \theta$. Ici les particules ont des vitesses $v \sim c$. Dans ce cas, la distribution de probabilité de l'angle d'incidence est égale à

$$dP(\cos \theta) = \frac{(1 + (V/c) \cos \theta)}{\int_{-\pi}^{\pi} (1 + (V/c) \cos \theta) d(\cos \theta)} d(\cos \theta) \tag{2.25}$$

En moyennant (2.24) en utilisant cette distribution on trouve

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta (1 + (V/c) \cos \theta) d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} (1 + (V/c) \cos \theta) d\theta} + 2 \frac{V^2}{c^2} = \frac{8}{3} \left(\frac{V}{c} \right)^2 \tag{2.26}$$

Il s'agit du gain moyen d'énergie par collision. C'est un phénomène d'ordre 2 en V/c , on l'appelle donc mécanisme d'accélération d'ordre 2. On peut dériver l'accélération totale obtenue pour chaque collision. En considérant que les lignes de champ sont parallèles au nuage, on peut estimer un temps moyen entre deux collisions que l'on note τ_0 . Dans ce cas la variation d'énergie est de l'ordre de :

$$\frac{\Delta E}{E \Delta t} = \frac{8}{3} \frac{V^2}{c^2} \frac{1}{\tau_0} \tag{2.27}$$

on a alors

$$\frac{dE}{dt} = \alpha E \tag{2.28}$$

Avec $\alpha = \frac{8}{3} \frac{V^2}{c^2} \frac{1}{\tau_0}$. On appelle ℓ la distance moyenne entre deux collisions dans la galaxie, alors τ_0 est donnée par

$$\tau_0 = \frac{\ell}{\langle v \rangle}$$

et la physique de la diffusion nous permet de trouver $\langle v \rangle = v/2 \sim c/2$, on a donc $\tau_0 = 2 \frac{\ell}{c}$ et

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} \left(\frac{V^2}{c \ell} \right) E$$

On estime dans la galaxie que le libre parcours moyen ℓ est de l'ordre de 0.1 pc soit environ 0.3 lyr, donc dans ce cas la particule ne peut faire que quelques collisions par an. Nous évaluerons α plus loin et montrerons que le mécanisme n'est pas efficace. Il peut en fait être plus efficace dans des zones plus restreintes, par exemple entre des structures au sein même d'un vestige de supernova où des ondes de choc se chargent de produire le mécanisme. Dans ce cas les libres parcours moyens sont beaucoup plus courts et les vitesses des ondes de choc engendrant l'accélération sont plus rapides. Le problème de ce seul type d'accélération au sein des supernovas est que dans le cas d'objets en expansion telles que les supernovas, les pertes adiabatiques vues en (2.12) ont tendance à dominer ce processus d'accélération.

Pour finir, on introduit τ_{esc} le temps moyen pendant lequel une particule est confinée dans la zone d'accélération. Avançons-nous un peu sur la suite de la thèse pour introduire brièvement l'équation de diffusion-pertes d'énergie, sans diffusion et sans sources, en régime stationnaire qui couple les variations énergétiques des particules à la variation de leur densité. Soit $N(E)$ la densité de particules accélérées dans la zone d'accélération, on a en régime stationnaire et sans diffusion

$$\frac{\partial [b(E)N(E)]}{\partial E} - \frac{N}{\tau_{\text{esc}}} = 0 \quad (2.29)$$

Et $b(E)$ décrit les pertes ou gains d'énergie, on a

$$b(E) = -\frac{dE}{dt}$$

Donc l'équation devient

$$-\frac{d(\alpha E N(E))}{dE} - \frac{N(E)}{\tau_{\text{esc}}} = 0 \quad (2.30)$$

Qui se résoud simplement en

$$N(E) = \text{Constante } E^{-1-1/(\alpha \tau_{\text{esc}})} \quad (2.31)$$

On trouve un mécanisme en loi de puissance car le produit $\alpha \tau$ est indépendant de l'énergie. Par contre

rien n'assure un indice spectral autour de 2. De plus, l'inconvénient de ce mécanisme est sa faible efficacité du fait du peu de collisions. Il faut rajouter à ça la faible vitesse des nuages moléculaires dans la galaxie par rapport à la vitesse des rayons cosmiques. Le rapport de vitesse est d'environ $V/c \leq 10^{-4}$ (Longair 2011), ce qui produit un gain d'énergie très faible sur la moyenne des collisions. On peut alors évaluer $\alpha \sim 10^{-8} \text{yr}^{-1}$ que l'on associe avec un temps caractéristique d'accélération de $\tau_{\text{acc}} \equiv 10^2 \text{ Myr}$. Ce temps est un ordre de grandeur du temps de confinement des rayons cosmiques dans la galaxie, le mécanisme est donc trop long pour pouvoir accélérer les particules. Le problème de ce mécanisme se pose particulièrement pour les particules de faible énergie qui perdent leur énergie par ionisation avant de pouvoir être accélérées suffisamment : il n'est en fait possible que d'accélérer les particules au delà d'une centaine de MeV. Pour finir, la loi de puissance associée à l'accélération n'est pas universelle, elle dépend de α et τ_{esc} qui dépendent de V/c pour le premier et qui est relié à la densité des nuages pour le deuxième. C'est pourquoi nous allons maintenant décrire un autre mécanisme pour accélérer les particules dans la galaxie. Un de ceux retenus pour son efficacité est l'accélération diffusive par ondes de choc ("diffusive shock acceleration"), voir par exemple (Drury 1983).

Cette théorie présente plusieurs avantages, tout d'abord, à chaque collision avec l'onde de choc la particule gagne de l'énergie (que la particule soit en amont ou en aval du choc). D'autre part les ondes présentes dans le plasma au niveau du choc rendent isotrope la direction de la particule. La distribution de probabilité associée à l'angle d'incidence ne dépend plus de V/c , ce qui permet d'obtenir un processus d'ordre 1 en V/c . Comme le coefficient V/c est très petit, une théorie qui donne une accélération au premier ordre en V/c est plus efficace, on l'appelle alors mécanisme d'accélération de Fermi du premier ordre. Pour décrire ce processus simplement, on commence par écrire l'énergie moyenne de la particule après une collision comme étant

$$E = \beta E_0$$

avec β une constante. On note P la probabilité que la particule reste dans la zone d'accélération après une collision. Alors, après k collisions le nombre de particules restantes sera

$$N = N_0 P^k$$

et elles auront une énergie moyenne de

$$E = E_0 \beta^k$$

On peut écrire

$$\frac{\ln(N/N_0)}{\ln(E/E_0)} = \frac{\ln P}{\ln \beta} \quad (2.32)$$

Qui conduit à

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\ln P / \ln \beta} \quad (2.33)$$

Pour obtenir le spectre différentiel il suffit de dériver

$$dN(E) = \text{Constante } E^{-1 + \ln P / \ln \beta} dE \quad (2.34)$$

C'est une formulation équivalente à (2.31). Le rapport $\ln P / \ln \beta$ peut s'exprimer uniquement en fonction du facteur de compression de l'onde de choc, qui ne dépend que de la nature du gaz, ce qui est un argument fort pour une loi de puissance universelle. Par exemple, pour un gaz monoatomique (ce qui est souvent le cas dans les ondes de choc astrophysiques), le rapport de compression associé permet de retrouver un indice spectral explicite de $-1 + \ln P / \ln \beta = -2$. Pour finir, les temps typiques d'accélération associés à ce genre de mécanismes sont de l'ordre d'une centaine d'années pour accélérer des particules à 100 TeV, période très inférieure au temps de confinement des rayons cosmiques dans la galaxie. Ce genre d'ondes de choc semble exister dans la galaxie. De très bon candidats permettant d'en produire sont les vestiges de supernovæ en expansion (SNR). Cependant le mécanisme n'est pas parfait à toutes les énergies, il existe un critère permettant de déterminer l'énergie maximale atteignable par un accélérateur : le critère de Hillas (Hillas 1984). Ce critère postule que le rayon de Larmor de la particule accélérée doit être inférieur à la taille caractéristique de l'accélérateur. Ce qui donne des énergies maximales de l'ordre de

$$E_{\max} \sim Z e R B c \quad (2.35)$$

Et si la source de rayonnement cosmique est en mouvement relativiste avec un facteur de boost γ :

$$E_{\max} \sim \gamma Z e R B c. \quad (2.36)$$

Pour une supernova, les champs magnétiques en présence sont de l'ordre du nT et les échelles spatiales inférieures au parsec, dans ce cas l'énergie maximale peut être évaluée à

$$E_{\max} \equiv 120 \text{ TeV } Z \left(\frac{B}{1 \text{ nT}} \right) L \quad (2.37)$$

L'énergie typique d'accélération maximale d'un proton est alors de 3×10^{15} eV, ce qui ne permet à priori pas de dépasser le genou. Cependant cette hypothèse est soumise à controverse et il existe des mécanismes permettant de confiner les rayons cosmiques au-delà de ces énergies. Toutefois, le domaine d'étude de cette thèse se situant avant le genou, nous retenons les supernovæ comme accélérateurs de rayons cosmiques.

2.2 Les vestiges de supernova comme sources de rayons cosmiques

Les vestiges de supernovæ sont de bons candidats à l'accélération de rayons cosmiques jusqu'à 10^6 GeV, au-delà le débat n'est pas encore tranché. L'explosion des supernovæ dégage une énergie d'environ 10^{51} erg, et environ 1% de cette énergie est transmise à la coquille de la supernova qui constitue l'onde de choc, qui se charge d'accélérer les particules grâce au mécanisme de "diffusive shock acceleration". C'est un des phénomènes les plus énergétiques de la galaxie. On recense plusieurs type de supernovæ, les supernovæ thermonucléaires (notées de type Ia ou parfois de type I par abus de langage) sont des explosions d'étoiles ayant dépassé la masse limite de Chandrasekhar, en général des naines blanches. L'explosion est alors déclenché suite à une accréation de matière d'un astre voisin.

Le deuxième grand type de supernovæ est appelé supernova par effondrement de cœur ou encore supernova gravitationnelle (notés Ib, Ic et II, ou parfois par abus de langage simplement II) : plus qu'une explosion au sens classique il s'agit plus précisément de l'éjection violente des couches externes d'une étoile très massive ($M > 8M_{\text{sun}}$). On appelle vestige de supernova les résidus qui apparaissent après cette éjection. En fonction de la masse de ces résidus, il peut y avoir au cœur du vestige formation de pulsar ou de trou noir. Ce type de supernova est beaucoup plus fréquent que le premier. Pour pouvoir travailler avec ces sources nous verrons qu'il nous faut connaître leurs distributions spatiale et temporelle dans la galaxie.

Les apparitions de supernovæ dans la galaxie sont généralement corrélées. En effet la physique stellaire nous apprend que les supernovæ de type II proviennent d'étoiles de type O. Ces étoiles naissent groupées dans les régions de formation d'étoiles. Certaines de ces étoiles dérivent mais il est possible qu'un certain nombre d'entre elles partagent un morceau d'histoire et évoluent en supernova en même temps, formant par la même occasion des structures appelées superbulles composées de plusieurs vestiges de supernovæ. Il est difficile de quantifier ce taux de corrélation, il est directement lié au nombre d'étoiles produites en même temps. La question importante est de connaître l'importance de ces corrélations au niveau du Système solaire. L'environnement local de notre galaxie ne présente pas de superbulle ayant été susceptibles de produire plus de quelques supernovæ, nous considérerons donc en première approximation une distribution temporelle uniforme de supernovæ. Nous devons associer à cette distribution uniforme des fréquences d'explosion. Ces dernières sont généralement déduites à partir d'observations de galaxies voisines. En effet dans notre galaxie la poussière du milieu interstellaire tend à masquer les supernovæ et les rend donc difficiles à détecter. On estime que les fréquences moyennes d'explosion de supernovæ de type I et II dans la galaxie sont de ([Ferriere 2001](#))

$$\begin{aligned} f_I &= \frac{1}{250 \text{ yr}} \\ f_{II} &= \frac{1}{60 \text{ yr}} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Pour l'accélération des rayons cosmiques c'est l'onde de choc qui nous importe, on considère donc indifféremment les deux types de supernovæ. Ces fréquences sont accompagnées de grosses incertitudes expérimentales, la valeur que nous utiliserons et retiendrons pour cette thèse, que l'on notera ν est donnée par (Diehl et al. 2006) obtenue en mesurant l'abondance de ^{26}Al grâce à ses émissions γ dans notre galaxie

$$\nu = 1.9 \pm 1 \text{ SNR/siècle} \quad (2.39)$$

Leur distribution spatiale est encore plus difficile à modéliser. Le long de la hauteur de la galaxie cette distribution ne joue pas un rôle très important et on suppose qu'elle suit la distribution de matière dans la galaxie, indifféremment du rayon, elle est donc modélisée par une exponentielle décroissante en suivant la proposition de (Wainscoat et al. 1992)

$$f_z(z) = e^{-|z|/h} \quad (2.40)$$

Le paramètre h est généralement pris comme étant la demie-hauteur du disque de matière soit $h = 100$ pc.

La distribution radiale est elle plus controversée. Il est difficile d'observer les supernovæ dans notre galaxie pour évaluer leur distribution sachant qu'une partie a pu être occultée par de la poussière du milieu interstellaire. Il existe différentes méthodes pour évaluer ces distributions. Une méthode consiste à considérer le fait que les supernovæ sont émettrices de rayons γ , il faut alors passer par un modèle de propagation en partant d'une distribution spatiale donnée de sources observées (et donc légèrement biaisée) et essayer de la modifier pour retrouver le flux γ observé dans notre galaxie ainsi que les flux de rayons cosmiques. Cette méthode a permis de dériver les distributions les plus utilisés (Strong & Moskalenko 1998; Case & Bhattacharya 1998). Les méthodes de détermination de ces distributions se basent également sur les observations des galaxies voisines pour affiner les résultats. Cependant, dans cette thèse nous ne prendrons pas ce parti. En effet, nous avons vu que les supernovæ de type II, les plus fréquentes, sont le lieu de naissance des pulsars. Ces derniers sont faciles à détecter dans le ciel si leur émission est dirigée dans notre direction. Les catalogues d'objets stellaires recensent beaucoup plus que de supernovæ, les erreurs statistiques associées à la détermination de ces distributions sont donc plus faibles. On les utilise donc comme traceurs de vestiges de supernovæ de type II et par extension étant donné le rapport de fréquence, comme traceur de vestiges de supernovæ. Cependant rappelons que chaque supernova ne donne pas lieu à un pulsar et que chaque pulsar n'est pas forcément détecté, la distribution n'est donc pas parfaite mais elle semble statistiquement plus fiable qu'une distribution de supernovæ. De façon générale, on modélise ces distributions par une loi de la forme

$$f_r(r) = f_0 r^a e^{-r^b} \quad (2.41)$$

Cette distribution assure un nombre de pulsars nul à l'infini ainsi qu'au centre galactique. Les observations montrent la présence d'un anneau moléculaire situé à un rayon de 4 kpc du centre galactique. Il s'agit d'un anneau contenant une surdensité de matière tels que les pulsars. Cette distribution permet de considérer une distribution suivant la même tendance. Dans cette thèse on choisit d'utiliser la distribution de pulsars la plus récente donnée par (Yusifov & Kucuk 2004). Cette distribution est légèrement décalée par rapport à la forme générale pour assurer un nombre de sources non nul au centre galactique :

$$f_r(r) = \left(\frac{r(\text{kpc}) + 0.55}{8.5 + 0.55} \right)^{1.64} \exp \left\{ -4.01 \frac{r(\text{kpc}) - 8.5}{8.5 + 0.55} \right\} \quad (2.42)$$

Cette distribution est représentée sur la figure 2.6 avec en regard les distributions de populations d'autres objets et notamment une distribution de SNR obtenue grâce aux observations de SNR de 1998. Pour finir, il se trouve que la plupart des pulsars ont tendance à se déplacer en même temps que

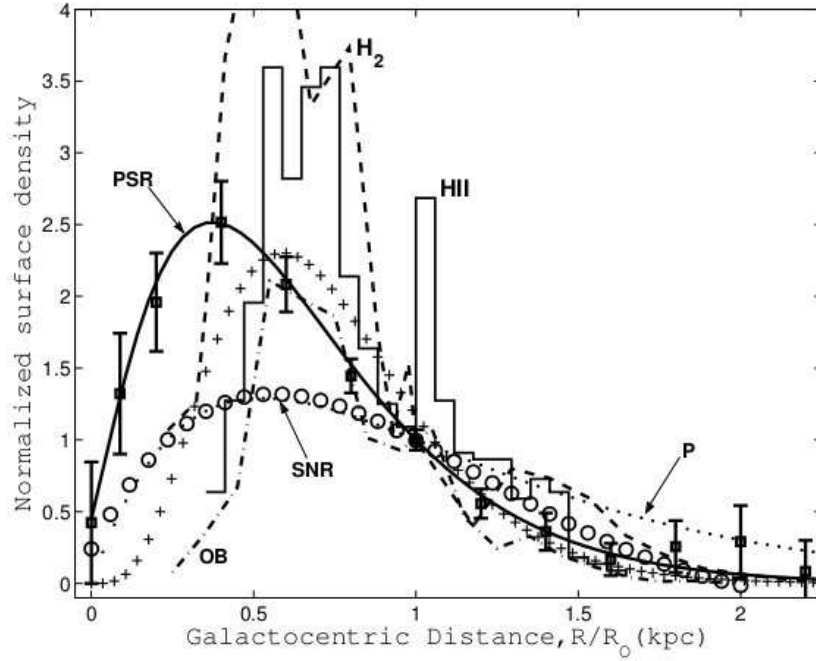


FIGURE 2.6: Distribution radiale de pulsars dans la galaxie (Yusifov & Kucuk 2004)

les bras spiraux. Il est possible de construire une distribution le long d'un angle θ dans le plan galactique suivant la distribution des bras spiraux. L'inconvénient de l'utilisation d'une telle distribution est qu'elle brise la symétrie cylindrique qui émergera de nos équations. De ce fait nous n'étudierons que brièvement ses effets. Cette distribution a été introduite par (Wainscoat et al. 1992) :

$$\theta(r) = K \log \left(\frac{r}{r_0} \right) + \theta_0 \quad (2.43)$$

TABLE 2.3: Modélisation des bras spiraux

Bras spiral	$K(\text{rad})$	r_0 (kpc)	θ_0 (rad)	taille (radians)
Norma	4.25	3.48	0	6
Carina - Sagittarius	4.25	3.48	π	6
Perseus	4.89	4.90	2.52	6
Crux - Scutum	4.89	4.90	5.666	6
Orion	4.57	8.10	5.847	0.555

Les paramètres θ_0 , r_0 et K sont utilisés pour décrire les 4 bras spiraux de la galaxie (plus le bras local), ils sont donnés par le tableau 2.3. La distribution est représentée (sans le bras local) sur la figure 2.7. Dans la littérature cette modélisation ne prend pas toujours en compte le bras d'Orion : le bras spiral

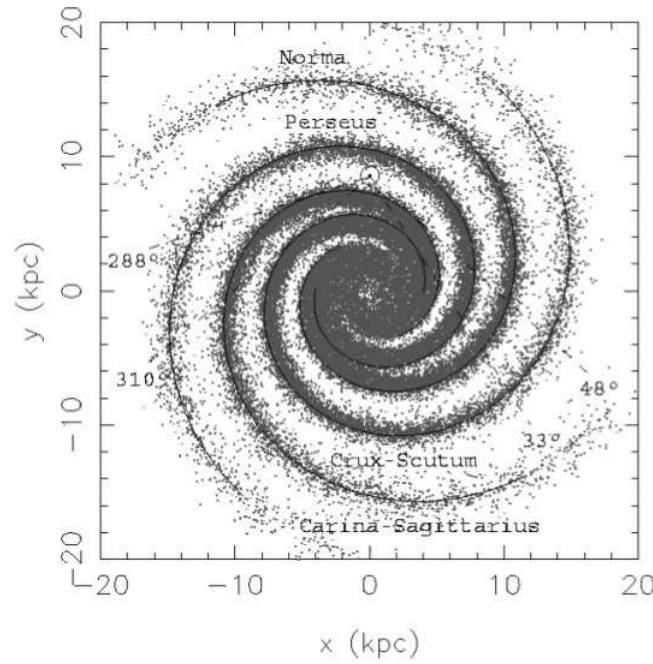


FIGURE 2.7: Distribution de pulsars dans la galaxie (en trait plein noir) (Wainscoat et al. 1992)

local. Or, on peut introduire une erreur significative si on ne le prend pas en compte étant donné qu'il se trouve à moins d'1 kpc de nous. Ces distributions permettent d'évaluer le taux d'apparition de pulsars dans la galaxie. Il a été dérivé par (Wainscoat et al. 1992) et est de

$$\nu_{\text{pulsar}} = 2.8 \pm 0.1 \text{ siècle}^{-1} \quad (2.44)$$

Il apparaît que ce taux semble plus en faveur d'un taux de supernovæ élevé.

Pour finir notons qu'il existe aussi des catalogues qui recensent les supernovæ ainsi que les pulsars ([Green 2009](#); [Manchester et al. 2005](#)), néanmoins ils cartographient essentiellement des objets locaux (situées à quelques kpc de nous) et oublient peut-être des objets pour des raisons d'occultation par des nuages de poussières. Mais ils sont une très bonne alternative pour une étude locale.

2.3 L'injection des rayons cosmiques

Ici nous discutons de la manière dont sont injectés les rayons cosmiques dans la galaxie. Ce terme d'injection est noté $Q(E, t)f(x, y, z)$, il décrit le nombre de particules injectées par GeV et par unité de temps à une position donnée de la galaxie. En ce qui concerne l'injection spatiale, pour considérer chaque source correctement, il faudrait théoriquement injecter les rayons cosmiques au niveau de la coquille du vestige de supernova. Le terme source devrait donc prendre en compte l'étalement de la supernova. Un tel terme source n'est pas trivial à traiter dans les équations de propagation. On considère au premier ordre que, vue du Système solaire, les sources sont ponctuelles. En effet, les sources les plus proches sont localisées à 100 pc et on estime qu'une supernova après avoir commencé à émettre des rayons cosmiques s'étale de quelques parsecs, l'approximation ponctuelle est donc correcte. Notons que les supernovæ les plus vieilles peuvent s'étendre jusqu'à 30 pc ([Longair 2011](#)), mettant en doute l'approximation, mais nous aurons l'occasion de montrer que les supernovæ âgées ne dominent pas le flux de rayonnement cosmique, négliger cet étalement ne produira donc pas de grosses erreurs.

Il existe principalement deux façons de traiter le problème de l'injection temporelle. Les rayons cosmiques étant extrêmement pénétrants il peuvent rentrer de plusieurs centimètres dans les météorites. De fait, les mesures des traces de rayonnement cosmique sur des météorites datées ont permis de montrer que le rayonnement cosmique est resté constant dans la galaxie (à un facteur 2 près) sur les 10^9 dernières années ([Reedy et al. 1983](#)). En se fiant à cette observation, il est possible de considérer une injection temporelle constante assurant un renouvellement perpétuel du flux. Du point de vue des équations, ça se traduit par le choix d'une équation de propagation stationnaire. Dans ce cas l'injection spatiale des rayons cosmiques peut ne pas être considérée comme ponctuelle mais comme suivant une distribution continue de sources comme celle mentionnée précédemment.

Pour étudier rigoureusement une injection temporelle non stationnaire, il faut se pencher sur la physique de la supernova. À priori elle n'accélère pas instantanément tous les rayons cosmiques au moment où elle explose. En fait il semblerait que les particules commencent à être relâchées au début de la phase de Sedov-Taylor ([Caprioli et al. 2010](#)). Cette phase correspond au moment où la masse balayée par la supernova est égale à la masse de l'éjecta, la masse balayée ne constitue alors plus un mur infranchissable et laisse libre le passage aux rayons cosmiques. À partir de ce moment le phénomène d'accélération devient efficace. L'âge correspondant au développement de cette phase est d'environ $T_{ST} = 200-400$ ans. Nous suivons ici le modèle proposé par ([Caprioli et al. 2009](#)) qui

suppose que pour un temps t donné le nombre de particules injectées par GeV est donné par

$$Q(E, t) = K(t)\delta(E - E_{\max}(t)) \quad (2.45)$$

On fait donc l'hypothèse que les particules sont relâchées par tranche d'énergie avec un spectre très piqué autour de E_{\max} . Certaines théories montrent que les cosmiques de plus grande énergie sont libérés en premier, ici ce phénomène est modélisé par un terme de la forme $E_{\max} = E_M(t/T_{ST})^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et E_M l'énergie maximale atteinte au temps T_{ST} . La valeur de α est choisie de sorte que quand la supernova disparaît (au temps τ_{SNR}) $E_{\max}(\tau_{\text{SNR}}) = E_0 = 1$ GeV. Ici il est considéré que l'énergie minimale à laquelle la supernova accélère les particules est de 1 GeV. La constante K est calculée en normalisant l'équation (2.45). Donc pour un temps t donné on veut

$$\int dE Q(E, t)E = \eta(t)E_{\text{cin}}(t) \quad (2.46)$$

où $E_{\text{cin}}(t)$ est l'énergie cinétique de la coquille. Il est possible de la calculer en fonction de l'énergie cinétique de la supernova au temps de Sedov-Taylor noté ϵ_{cin} en calculant la masse de l'éjecta au temps de Sedov-Taylor (Blasi & Amato 2011). On a alors

$$E_{\text{cin}}(t) = \epsilon_{\text{cin}} \frac{1}{t} \left(\frac{6}{5}\right)^3 \quad (2.47)$$

Ici, $\eta(t)$ décrit l'efficacité de l'accélération au cours du temps, pour retrouver une accélération de la forme de l'accélération de Fermi il faudrait choisir $\eta = 1$. Le terme source temporel final est donc :

$$Q(E, t) = \delta(E - E_M(t/T_{ST})^{-\alpha}) \eta(t) \frac{\epsilon_{\text{cin}}}{T_{ST}} \left(\frac{6}{5}\right)^3 \frac{1}{E_M} \left(\frac{t}{T_{ST}}\right)^{\alpha-1} \quad (2.48)$$

Cette accélération a lieu entre T_{ST} et $\text{Min}(T_{ST} + \tau_{\text{SNR}}, t - t_{\text{source}})$. Un tel terme d'accélération est délicat à utiliser car il contient des paramètres libres (η , τ_{SNR} , etc) dépendant de la forme d'injection choisie. Il est possible de choisir une forme moins piquée en énergie avec d'autres paramètres. L'étude de ce terme est très importante mais constitue une étude à part entière et, pour ne pas trop mélanger le problème de propagation et le problème d'accélération nous choisirons plutôt un terme simple d'accélération temporelle ponctuelle. On considérera qu'une supernova injecte au moment de son explosion tout ses rayons cosmiques, sans considérer le temps de Sedov-Taylor. Ce temps étant de 1000 ans, il est court face aux échelles de temps de la galaxie et nous verrons que les incertitudes expérimentales sur les distributions temporelles de supernovæ couvrent cette approximation. On s'intéressera tout de même aux effets de l'injection continue en énergie sur nos résultats en utilisant des paramètres d'accélération typiques. Nous pourrions ainsi étudier son influence.

Tout ces ingrédients constituent une grosse partie de la physique de notre problème. Néanmoins il reste le principal phénomène à étudier : la diffusion des rayons cosmiques sur le champ magnétique

galactique. Pour justifier ce phénomène nous allons étudier brièvement le comportement de particules chargées plongées dans un plasma galactique.

3 ÉTUDE CINÉTIQUE DU PLASMA ET DIFFUSION

La plupart de la matière interstellaire dans l'univers est ionisée. Dans un gaz de particules chargées, la force de Lorentz collective influence considérablement les propriétés du milieu. On appelle un tel état de la matière un plasma. Son étude est assez contemporaine (le terme plasma a été inventé en 1928 par Irving Langmuir). Dans cette partie nous verrons quelles sont les conditions d'apparition d'un plasma, puis nous nous pencherons sur ses équations de base et leurs difficultés. Nous arriverons à montrer que, dans certaines conditions, perturber le champ magnétique d'un plasma conduit à une propagation diffusive des particules chargées constituant ce plasma. Nous verrons comment le coefficient de diffusion associé à ce plasma peut être étudié et traité.

3.1 Les propriétés de base du plasma

Considérons le cas simple d'un plasma complètement ionisé contenant la même densité de charges positives et négatives. On note n_e la densité d'électrons et n_p la densité de protons en m^{-3} . On a $n_p = n_e$. Dans ce cas les forces électrostatiques entre électrons et protons assurent la neutralité globale du plasma, sauf sur de petites échelles inférieures à une longueur caractéristique appelée la longueur de Debye λ_D . Étudions brièvement ce plasma à une dimension en considérant une petite perturbation. On déplace une couche d'électrons d'épaisseur x d'une distance δx par rapport aux ions. La densité surfacique de charge sur cette longueur est définie par $\sigma = en_e \delta x$. Le champ électrique qui apparaît pour rétablir la neutralité sera égal à $E = \sigma / \epsilon_0$. La force électrique associée est $F = -qE$ avec $q = en_e x$. On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique pour trouver

$$m \frac{d^2 \delta x}{dt^2} = -(en_e x) \frac{en_e \delta x}{\epsilon_0} \quad (2.49)$$

$$\frac{d^2 \delta x}{dt^2} = -\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \delta x \quad (2.50)$$

C'est l'équation d'un mouvement harmonique simple avec une pulsation de $\omega^2 = e^2 n_e / \epsilon_0 m_e$ appelée la pulsation plasma. On a

$$\omega_{p,e} = 56 n_e^{1/2} \text{s}^{-1} \quad (2.51)$$

On y associe la fréquence plasma

$$\nu_{p,e} = 8.97 n_e^{1/2} \text{Hz} \quad (2.52)$$

Pour le cas des protons, il suffit de remplacer dans les calculs m_e par m_p et donc la fréquence plasma associée est divisée par un facteur $\sqrt{m_p/m_e} = 46$. Le plasma complètement ionisé est supposé à l'équilibre thermique, à température T . On a donc, à une dimension, d'après la physique statistique :

$$\frac{1}{2} m_e \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} kT \quad (2.53)$$

Ici la vitesse des électrons est donc définie par

$$v_x = \sqrt{\frac{kT}{m_e}} \quad (2.54)$$

La longueur de Debye correspond à la longueur parcourue par un électron pendant un radian d'oscillation du plasma. Elle est donc définie comme

$$\lambda_D = \frac{v_x}{\omega_p} = \sqrt{\frac{kT\epsilon_0}{n_e e^2}} \quad (2.55)$$

Cette longueur ne dépend pas de m_e , elle est donc la même pour les protons et les électrons. C'est la distance à partir de laquelle la force de Coulomb d'une charge est écrantée et n'est plus vue par les autres charges du plasma.

De ce fait chaque charge du plasma n'interagit électrostatiquement qu'avec les charges à l'intérieur de cette sphère. On définit aussi λ_s comme étant le nombre d'électrons présents dans une sphère de rayon égal à la longueur de Debye. C'est une quantité sans dimension donnée par

$$\lambda_s = \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 n_e \quad (2.56)$$

On note

$$g = \frac{1}{\lambda_s}$$

le paramètre plasma. Plus il est petit et plus il y a d'électrons interagissant dans la sphère de Debye. Si $g \ll 1$, la sphère de Debye est grande, les forces électrostatiques sont très importantes dans le plasma donc les charges ont peu de chance d'entrer en collision élastique les unes avec les autres, dans ce cas le plasma est dit cinétique ou non-collisionnel. Dans le cas des plasmas constitués par les rayons cosmiques, g est de l'ordre de 10^{-9} . Le plasma est donc hautement non collisionnel ([Shkarofsky et al. 1966](#)).

Nous allons ici étudier le comportement des particules dans un plasma perturbé, voir turbulent.

Avant d'essayer de résoudre formellement les équations de la physique des plasmas, nous allons étudier qualitativement la turbulence, et notamment son spectre de puissance.

3.2 La forme de la turbulence magnétique

Nous nous intéressons ici au spectre de la turbulence, c'est à dire à l'amplitude des perturbations en fonction de leur fréquence, ou encore à l'énergie transportée par les perturbations en fonction de leur échelle spatiale. Plaçons nous dans le cadre de fluides incompressibles (qui conservent un volume constant sous l'effet de pressions extérieures).

Rappelons le principe de similarité pour des fluides : pour une géométrie donnée des limites du fluides le seul paramètre de contrôle d'un écoulement est le nombre de Reynolds. On considère donc cette grandeur caractéristique des fluides : **Re**. Ce nombre sans dimension décrit, dans un fluide, le rapport entre les forces inertielles et les forces visqueuses. Il peut être écrit :

$$Re = \frac{vL}{\nu} \quad (2.57)$$

Ici L est une longueur caractéristique du fluide, v sa vitesse moyenne et ν sa viscosité cinématique en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Plus le nombre de Reynolds est élevé, moins la viscosité du fluide a d'importance dans l'écoulement et plus l'écoulement est turbulent. La transition se fait pour des nombres de Reynolds compris entre $2500 < Re < 4000$ (Holman 2010). Ici on se place dans le cas de fluide à nombre de Reynolds très élevé ($Re \gg 4000$) (Shore 2007). Ce genre d'écoulement est caractérisé comme étant très turbulent. Commençons par reprendre l'image de Lewis Fry Richardson, un mathématicien, météorologiste et psychologue britannique du début du 20ème siècle : la turbulence est constituée de tourbillons de différentes tailles. Les tourbillons les plus larges sont les plus instables et ont tendance à se briser pour former de plus petits tourbillons, ce qui est illustré sur la figure 2.8, et sur la figure 2.9.

Ce processus transmet l'énergie en cascade, des perturbations de grandes échelles aux perturbations de plus petites échelles, on appelle ce régime de turbulence le régime inertiel. À partir d'une certaine échelle de taille suffisamment petite (appelée ici η), c'est la viscosité du fluide qui va prendre le relais pour dissiper l'énergie cinétique des tourbillons. On peut donc prévoir l'apparition d'une échelle de taille caractéristique qui dépend de la viscosité mais aussi du taux de dissipation du fluide. D'autre part jusqu'à une certaine échelle de taille ℓ_s , l'énergie est directement transférée à la turbulence. On distingue donc trois régimes en échelle spatiale (Shore 2007)

- $\ell > \ell_s$ L'énergie est directement transférée à la turbulence.
 - $\ell_s < \ell < \eta$ Le régime inertiel : l'énergie est transmise en cascade depuis les grandes échelles spatiales de turbulence aux échelles plus petites.
 - $\ell < \eta$ Le régime de dissipation : l'énergie des turbulences est dissipée par frottement visqueux.
- L'échange d'énergie entre les perturbations de différentes échelles se fait par des phénomènes non

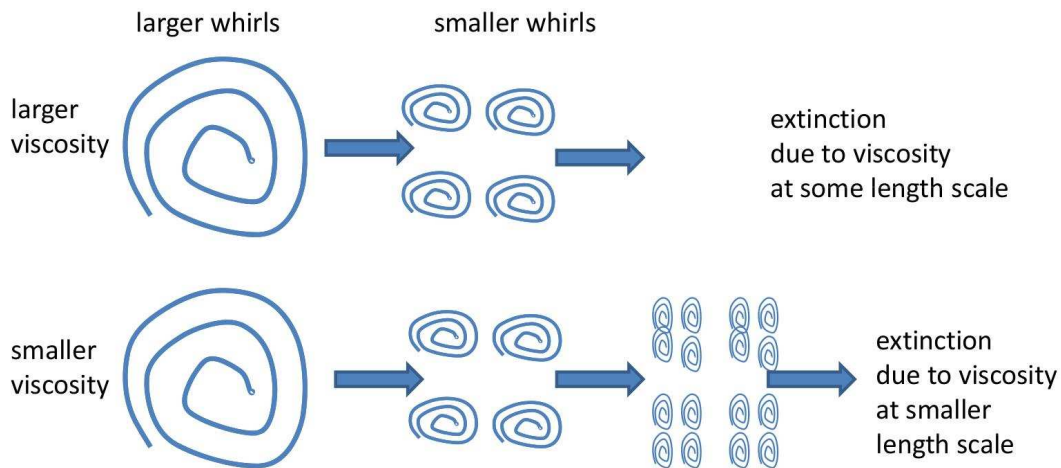


FIGURE 2.8: Modèle de Richardson de la turbulence ([Khusnutdinova K. 2009](#))

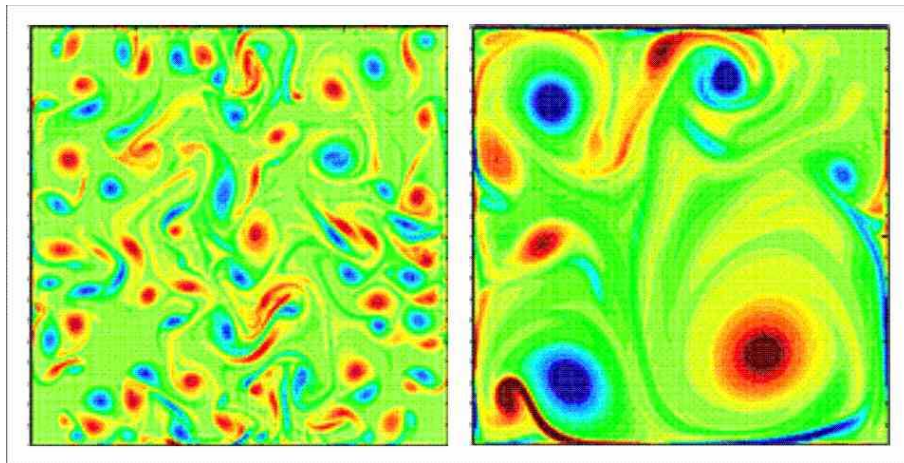


FIGURE 2.9: Simulation d'une turbulence ([Clercx et al. 1999](#))

linéaires et reste très difficile à décrire. Pour décrire cette cascade énergétique le mathématicien Andreï Kolmogorov postule en 1941 trois hypothèses corroborant les idées de Richardson qui vont le conduire à une forme explicite du spectre de la turbulence ([Kolmogorov 1941](#)).

Hypothèse 1 : dans la limite des nombres de Reynolds infinis, toutes les symétries de l'équation de Navier-Stokes, usuellement brisées par les mécanismes générateurs d'écoulements turbulents, sont restaurées au sens statistique, à des petites échelles et loin des limites du fluide.

Si l'énergie est transférée des petits nombres d'onde vers les grands nombres d'onde où elle finit par être dissipée, alors les échelles de temps caractéristiques associées aux mouvements des perturbations à grands nombres d'onde sont beaucoup plus courtes que celles associées aux mouvements à petits nombres d'onde. Si ces temps caractéristiques sont suffisamment courts, les processus peuvent être

traités de manière statistique. En ce sens on peut dire que pour les grands nombres d'onde ont atteint un équilibre statistique, et donc un régime d'équilibre. Ce régime englobe le régime inertiel et le régime de dissipation.

Cette hypothèse nous permet de trouver l'expression d'un taux de dissipation dans le régime d'équilibre de la turbulence. En partant de l'équation de Navier-Stokes (qui résulte de l'application du principe fondamental de la dynamique pour les fluides) pour un fluide incompressible sans forces extérieures

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p / \rho + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (2.58)$$

En faisant l'hypothèse d'homogénéité, d'isotropie et en incluant des perturbations dans l'équation de Navier-Stokes on peut démontrer, partant de cette équation que

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial k} - 2\nu k^2 E(K) + \dots \quad (2.59)$$

Avec $E(k)$ donné par

$$\int_0^\infty E(k) = \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle \quad (2.60)$$

Ici on introduit une fonction ϵ qui traduit le taux de transfert d'énergie des perturbations dont le nombre d'onde est plus petite que k vers celles pour lesquelles le nombre d'onde est plus grand que k . Cette fonction est en fait un taux de dissipation d'énergie. Dans le régime stationnaire, par définition, on a

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (2.61)$$

Ce qui conduit à :

$$\epsilon_0 = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk \quad (2.62)$$

Ici ϵ_0 décrit le taux de dissipation d'énergie dans le régime d'équilibre, ϵ_0 est en $\text{m}^2 \text{s}^{-3}$.

Hypothèse 2 : à très haut nombre de Reynolds, comme la statistique des éléments du fluide dans le régime inertiel est indépendante des échelles spatiales plus élevées, elle est universelle et uniquement déterminée par la viscosité cinématique ν et le taux de dissipation ϵ_0 .

De ces deux quantités on peut donc définir l'échelle spatiale de dissipation η , échelle pour laquelle la viscosité est de l'ordre de la dissipation dans le fluide et à partir de laquelle l'énergie sera dissipée par viscosité. Comme le stipule la deuxième hypothèse cette échelle ne dépend que de ν et ϵ_0 . On a

donc

$$\eta = \nu^a \epsilon_0^b \quad (2.63)$$

η étant en mètres, l'analyse dimensionnelle donne tout de suite :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon_0} \right)^{1/4} \quad (2.64)$$

On veut alors réécrire l'énergie en fonction de ϵ_0 , η et k avec une fonction sans dimension $F(k\eta)$ qui décrit le comportement de la turbulence dans le régime de dissipation.

$$E(k) = \epsilon_0^a k^b F(k\eta) \quad (2.65)$$

L'analyse dimensionnelle nous permet d'écrire cette énergie sous la forme :

$$E(k) = \epsilon_0^{2/3} k^{-5/3} F(k\eta) \quad (2.66)$$

Enfin la troisième hypothèse de Kolmogorov précise :

Hypothèse 3 : à très haut nombre de Reynolds la statistique des échelles quand $\ell_s^{-1} \ll k \ll \eta^{-1}$ (régime inertiel) est **universelle** et déterminée uniquement par les paramètres k et ϵ_0 . Ce qui veut dire que dans ce régime la forme de l'énergie est donnée par

$$E(k) = C \epsilon_0^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.67)$$

Avec C une constante appelée **constante de Kolmogorov**. Cette loi est appelée **la loi des 5/3 de Kolmogorov**.

Partant de seulement quelques hypothèses d'universalité, Kolmogorov a réussi à déterminer l'expression d'un régime appelé régime inertiel de turbulence. Il a été observé à de multiples reprises, voir par exemple la figure 2.10.

Dans le cas présent nous travaillons avec un plasma, l'utilisation du nombre de Reynolds est donc un peu inappropriée. Il existe un analogue appelé le nombre de Reynolds magnétique défini par

$$R_{e,\text{mag}} = \frac{\nu L}{\eta}.$$

Le coefficient η est appelé diffusivité magnétique et joue le rôle des forces de viscosité dans cette analogie. Dans le cas du rayonnement cosmique le nombre de Reynolds magnétique est supérieur à 10^{20} , ce qui assure le cadre de la théorie. Cependant l'analogie s'arrête là car un plasma n'est pas décrit uniquement par un champ de vitesse comme dans l'équation de Navier-Stokes mais par

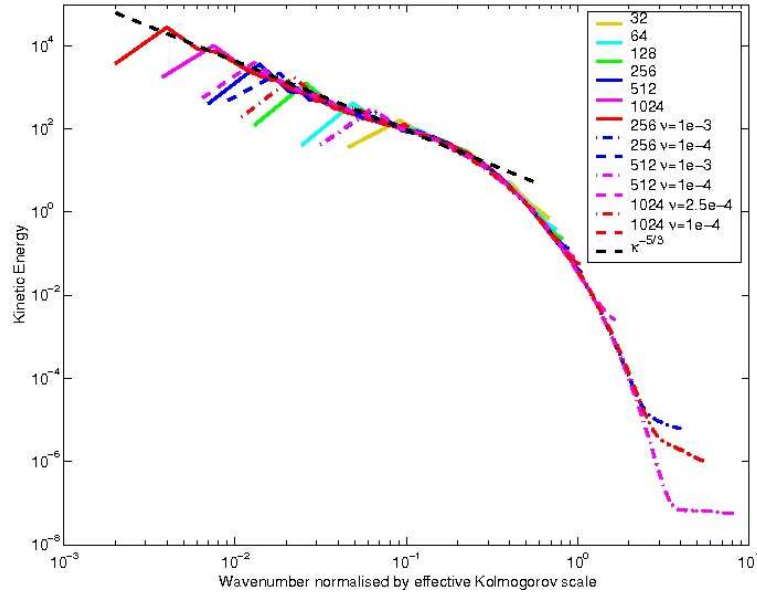


FIGURE 2.10: Tests d'écoulements d'air en soufflerie. Les tests sont effectués pour différents nombres de Reynolds et différentes viscosités. Les mesures sont comparées au spectre en $k^{-5/3}$ en pointillés noir. La théorie de Kolmogorov est très bonne sur toute une gamme de longueurs d'onde correspondant au régime stationnaire. La chute de la courbe sur la droite illustre la présence d'un régime de dissipation. L'allure des courbes à basse énergie montre l'existence d'un régime pour lequel les perturbations gagnent de l'énergie (Aspden et al. 2008).

un champ de vitesse et un champ électromagnétique. De ce fait, les échanges d'énergie ne se font plus uniquement entre les champs de vitesses des différentes turbulences, mais également entre les champs magnétiques. Dans les années 70, Robert H. Kraichnan et P. S. Iroshnikov (Iroshnikov 1964; Kraichnan 1965) travaillent chacun sur la théorie de la turbulence magnétohydrodynamique pour arriver séparément à la même expression du spectre de turbulence (Davidson 2011)

$$E(k) = C'(\epsilon_0 b_0)^{12} k^{-2/3} \quad (2.68)$$

Où b_0 indique l'écart-type des perturbations magnétiques. Les processus sont différents car les interactions magnétiques dans le plasma sont à grande échelle. La turbulence n'est plus une cascade avec transfert d'énergie de proche en proche, mais de l'énergie peut être transférée sur de grandes échelles spatiales. Cet échange est aussi en grande partie dû aux transferts d'énergie via les ondes d'Alfvén. Cependant aujourd'hui le débat n'est pas encore tranché sur la théorie la mieux adaptée au traitement des plasmas astrophysiques. D'autre part, de nombreux phénomènes spécifiques à l'électromagnétisme peuvent entrer en compte dans le comportement de la turbulence au niveau microscopique et agir sur les transferts d'énergie. Certaines théories (Lesur & Longaretti 2010) essaient de décrire des

phénomènes pouvant transférer de l'énergie depuis les petites échelles spatiales jusqu'aux échelles spatiales plus grandes. Il est aussi possible qu'ils transfèrent de l'énergie sans processus de cascade. Parmi ces phénomènes citons par exemple :

- La reconnexion magnétique : dans les plasmas fortement conducteurs, la topologie du champ magnétique peut être modifiée, entraînant une conversion de l'énergie magnétique en énergie cinétique.
- L'effet dynamo.
- Apparition d'ondes magnétosoniques dans le cadre d'un plasma compressible.

Malheureusement ces processus sont particulièrement difficiles à décrire dans le cadre de systèmes turbulents et nous n'entrerons pas dans le détail ici. D'autre part il est tout à fait possible que cette turbulence soit anisotrope et intermittente ce qui semble être le cas des turbulences du milieu interstellaire (voir par exemple (Yan & Lazarian 2008)). Toutefois le calcul présenté ici à plus une vocation pédagogique, pour illustrer le fait qu'il est possible sous certaines approximations de construire une équation de diffusion à partir des propriétés microscopiques du plasma. Pour la suite de cette partie, nous considérerons donc d'abord une turbulence de Kolmogorov, puis plus loin, on s'autorisera à varier le spectre de cascade de la turbulence. En étudiant les rayons cosmiques on obtient des informations sur la manière dont ils se propagent et donc sur les propriétés du milieu (par exemple son coefficient de diffusion, voir 3.5 (page 76)). Cette étude permet donc indirectement d'obtenir des informations sur la nature de la turbulence.

3.3 Description cinétique d'un plasma

Nous essayons maintenant de décrire le plasma dans son ensemble. Pour commencer nous allons rappeler la difficulté de l'étude des plasmas en suivant l'exemple de (Schlickeiser 2002). Considérons un plasma avec un paramètre g petit, comme nous venons de le voir un tel plasma est caractéristique des plasmas interstellaires. Les forces de Lorentz en présence sont telles que le plasma est non collisionnel. Les particules n'interagissent donc pas de manière élastique mais uniquement via la force de Lorentz. Soit j une particule appartenant à ce plasma. Pour établir les équations du mouvement de cette particule, considérons la force de Lorentz de cette particule soumise à l'action d'un champ magnétique \vec{B} et d'un champ électrique \vec{E}

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q_j \vec{v} \wedge \vec{B} + q_j \vec{E} \quad (2.69)$$

On applique la seconde loi de Newton à la particule

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}$$

Pour avoir

$$m_j \frac{d\vec{v}}{dt} = q_j \vec{v} \wedge \vec{B} + q_j \vec{E} \quad (2.70)$$

C'est l'équation du mouvement d'une particule soumise à l'action d'un champ électromagnétique. Une telle équation peut se résoudre simplement pour une seule particule, mais dans le cadre de la physique des plasmas il faudrait la résoudre pour chacune des particules du gaz, et il faudrait notamment pour cela, connaître la position et la vitesse initiale de chacune des particules. C'est pourquoi dans ce contexte, on n'utilise pas la vitesse exacte de chacune des particules. Dans l'approche cinétique des plasmas, on considère plutôt la distribution de probabilité de vitesse de chacune des particules. Cet objet mathématique décrit la densité de probabilité qu'une particule ait une vitesse \vec{v} à la position \vec{x} . Cette fonction est appelée $F_j(\vec{x}, \vec{v})$ avec $0 \leq F_j \leq 1$. On utilise également la fonction de densité de probabilité définie comme

$$f_j(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{\partial^3 F_j}{\partial v_x \partial v_y \partial v_z}$$

Dans ces définitions, les variables \vec{x} et \vec{v} sont indépendantes, la variable \vec{x} n'est plus la position de la $j^{\text{ième}}$ particule mais une position dans le plasma.

La fonction f est modifiée au cours du temps à cause de l'action de la force de Lorentz. Pour établir sa variation, on la fait apparaître dans la différentielle totale exacte de f . On notera pour la suite $\vec{x} = \mathbf{x}$ et $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$

$$\begin{aligned} df_j &= \frac{\partial f_j}{\partial t} dt + d\mathbf{x} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{x}} + d\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} \\ \frac{df_j}{dt} &= \frac{\partial f_j}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Cette variation totale de particules par rapport au temps est égale à la création moins la destruction de particules au cours du temps, on définit ce terme $S_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Donc

$$\frac{df}{dt} = S_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

Pour une description plus complète, il faudrait ajouter un terme traduisant les effets des collisions au sein de plasma. Ici le plasma traité étant non collisionnel on ne prend pas la peine de l'exprimer.

On écrit également $\dot{\mathbf{x}} \cdot \partial/\partial \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \nabla$. On remplace ensuite $\dot{\mathbf{v}}$ en utilisant (2.70) pour obtenir

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} [E(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \wedge B(\mathbf{x}, t)] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = S(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (2.72)$$

Cette équation est connue comme étant **l'équation de Vlasov non-relativiste**. On suppose que pour une espèce donnée, chaque particule du plasma a le même comportement et donc la même fonction

de densité de probabilité, l'indice j est donc obsolète et a été retiré. Dans notre cas nous n'entrerons pas dans le détail d'interactions inter-espèces. La quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ représente la probabilité qu'une particule se trouve en \mathbf{x} au temps t . De ce fait, en posant n la densité volumique moyenne de particules, la densité de particules au point \mathbf{x} et au temps t définit la normalisation de la distribution de probabilité f . Elle est donnée par

$$n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (2.73)$$

Remarquons qu'en multipliant cette valeur par la charge électrique de l'espèce en question et en sommant sur toutes les espèces (indiquées a) on retrouve la densité de charge électrique du plasma.

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_a q_a \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f_a(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (2.74)$$

De même la vitesse moyenne des particules au point \mathbf{x} et au temps t est donnée par

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{n(\mathbf{x}, t)} \quad (2.75)$$

Cette grandeur, normalisée par le nombre de particules, multipliée par la charge d'une espèce et sommée sur toutes les espèces donne la densité totale de courant électrique.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_a q_a \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (2.76)$$

Ce résultat montre que le mouvement des particules du plasma génère lui-même le champ magnétique et le champ électrique associés au plasma. C'est une des difficultés de la physique des plasmas, pour résoudre l'équation de Vlasov, il faut connaître les champs \mathbf{B} et \mathbf{E} associés au plasma. Pour connaître ces champs il faut résoudre les équations de Maxwell et donc connaître la densité f associée à l'équation de Vlasov. Ces deux quantités sont couplées non linéairement par le système d'équation Maxwell-Vlasov. Pour contourner ce couplage, on peut adopter deux points de vue :

- L'approche ondulatoire : la distribution f est considérée comme étant fixée et connue au temps initial de résolution, de sorte qu'on puisse se pencher sur l'évolution et le comportement du champ électromagnétique seul.
- L'approche des particules-test : le champ électromagnétique est supposé connu au temps initial de résolution et on s'intéresse aux propriétés et à l'évolution de la fonction f .

Si on calcule les moments en vitesse de l'équation de Vlasov, on obtient un jeu infini d'équations différentielles. Le moment d'ordre n est défini par la solution trouvée en multipliant l'équation de Vlasov par v^n et en l'intégrant sur v . La détermination du moment d'ordre n fait intervenir le calcul du moment d'indice $n + 1$. Par récurrence, il faut donc résoudre une infinité d'équations pour obtenir

chaque moment. Ce type de hiérarchie dans un système d'équations est appelée hiérarchie BBGKY en référence à Bogolyubov, Born, Green, Kirkwood et Yvon. Pour se débarrasser de ce problème il faut effectuer une coupure ou une paramétrisation appropriée du moment d'ordre $n + m$ qui devient négligeable pour l'équation d'ordre n . La coupure ainsi effectuée permet d'obtenir un ensemble fermé de m équations définissant intégralement le système. Par exemple considérons le moment d'ordre zéro. On intègre (2.72) pour faire apparaître (2.73) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [n \mathbf{V}] + \frac{q}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v S \quad (2.77)$$

On peut regarder en détail le terme faisant intervenir explicitement le champ électromagnétique et montrer que celui-ci s'annule (il faut utiliser pour cela le fait que $f(v_i = \pm\infty) \rightarrow 0$). L'équation résultante est donc

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n(\mathbf{x}, t) \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) = Q(\mathbf{x}, t) \quad (2.78)$$

avec $Q(\mathbf{x}, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v S$ le terme source de création de masse.

Il s'agit de l'équation de conservation de la masse pour un fluide. On peut voir que pour résoudre cette équation il faut résoudre l'équation d'ordre supérieur pour obtenir \mathbf{V} .

Pour établir cette équation, on multiplie (2.72) par v et on l'intègre pour obtenir (tous calculs faits)

$$m n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} + \sum_{i1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi_{ki} = q n [\mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}] + Q \mathbf{P}_k(\mathbf{x}, t) \quad (2.79)$$

avec $Q \mathbf{P}_k(\mathbf{x}, t) \equiv m \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v v S$ le terme source de création de moment et $\Pi_{ki} \equiv m \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) (v_i - V_i)(v_k - V_k)$ le tenseur de pression.

Cette équation fait intervenir Π_{ki} qui doit être obtenu avec l'équation d'ordre supérieur, et ainsi de suite. Une troncature, souvent utilisée pour des plasmas à faible température, postule que chaque particule possède la même vitesse qui est la vitesse moyenne macroscopique des particules du plasma \mathbf{V} . Donc $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V})$. Dans ce cas, on montre facilement que $\Pi = 0$, ce qui permet de fermer le système d'équations. Dans le domaine de l'astrophysique, l'approximation plasma froid n'est pas valable, il faut donc se tourner vers une autre solution.

Nous allons étudier des particules relativistes. Faisons donc apparaître les grandeurs relativistes dans notre équation. En utilisant l'impulsion $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ on obtient

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = S(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (2.80)$$

L'équation du mouvement nous donne

$$\dot{\mathbf{p}} = q \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right].$$

Pour étudier l'effet de la turbulence dans le plasma, la première étape est de séparer le champ électromagnétique en une composante uniforme et une composante turbulente. Ensuite on choisit d'orienter la composante uniforme du champ magnétique le long de l'axe z . Pour finir, sur des grandes échelles, les forces coulombiennes assurent la neutralité du plasma puisqu'on a postulé $n_e = n_p$. De ce fait le champ électrique moyen au sein du plasma est nul. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) + \delta\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{B} &= B_0 \mathbf{e}_z + \delta\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{E} &= \delta\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Une caractéristique importante de ces fluctuations est que leur moyenne est nulle, il n'existe pas de fluctuation préférentielle dans le milieu, donc $\langle \delta\mathbf{B} \rangle = \mathbf{0}$ et $\langle \delta\mathbf{E} \rangle = \mathbf{0}$. Pour la suite des calculs, on définit l'indice \parallel pour indiquer les coordonnées suivant la ligne de champ, donc l'axe z , et \perp indiquera les valeurs perpendiculaires aux lignes de champ. On utilise un système de coordonnées sphériques dans l'espace des impulsions : (p, θ, Φ) . L'angle θ détermine l'angle entre l'impulsion de la particule et la ligne de champ. On remplace communément cet angle par $\mu = \cos \theta$, qu'on appelle "pitch angle". On a ainsi le système

$$\mathbf{p} = \begin{cases} p_x &= p \cos \Phi \sqrt{1 - \mu^2} \\ p_y &= p \sin \Phi \sqrt{1 - \mu^2} \\ p_z &= p\mu \end{cases} \quad (2.82)$$

D'autre part, on peut résoudre l'équation (2.70) pour une seule particule autour d'une ligne de champ. Sa trajectoire est décrite par un mouvement de giration autour de la ligne de champ. Ainsi, plus qu'à la trajectoire réelle de la particule, on s'intéresse à la coordonnée du centre de guidage de sa trajectoire (guiding center), c'est-à-dire

$$\mathbf{R} = (X, Y, Z) = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_z}{Z\Omega} \quad (2.83)$$

avec

$$\Omega = \frac{qB_0}{mc} \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2.84)$$

La trajectoire associée est représentée sur la figure 2.11. La grandeur Ω définit la fréquence de giration de la particule autour de la ligne de champ. On ne cherche donc plus à travailler dans l'espace (x, y, z, p_x, p_y, p_z) mais dans (X, Y, Z, p, μ, Φ) . On effectue ce changement de variable dans l'équation

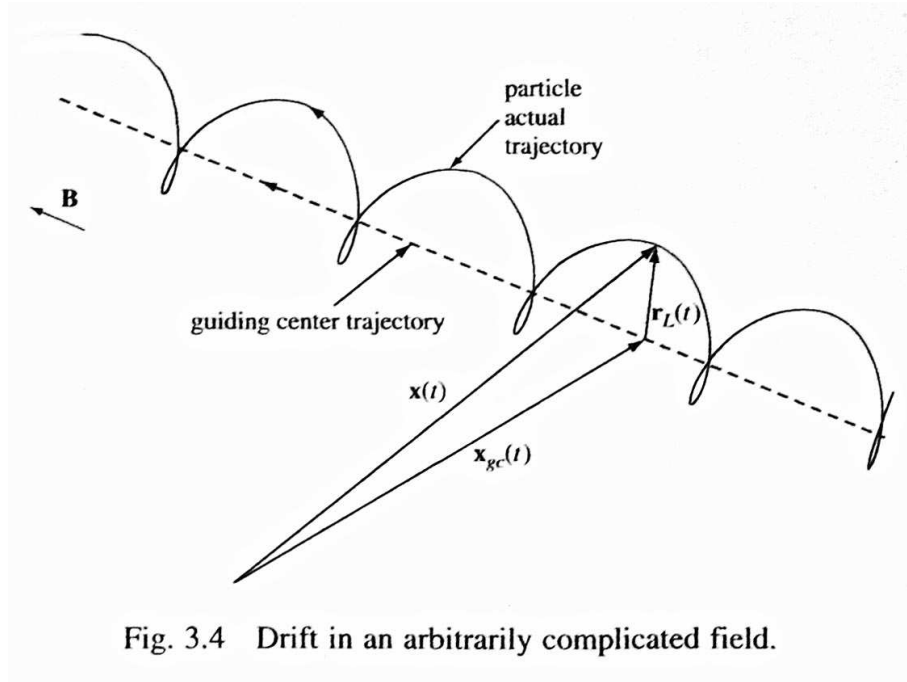


Fig. 3.4 Drift in an arbitrarily complicated field.

FIGURE 2.11: Coordonnée du centre de guidage (Shkarofsky et al. 1966)

de Vlasov pour la changer en

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f}{\partial Z} - \epsilon\Omega \frac{\partial f}{\partial \Phi} + \frac{1}{p^2} \partial_\sigma (p^2 g_\sigma f) = S(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (2.85)$$

Les indices σ indiquent l'ensemble des six coordonnées. Sa sommation est implicite dans la notation. D'autre part, le détail des calculs montre qu'on regroupe dans le terme g_σ tous les termes dépendant explicitement des variations du champ électromagnétique (donc le cas $g_\sigma = 0$ correspond à des trajectoires non perturbées). Ce terme aura pour conséquence de développer une partie fluctuante à la densité totale f . On sépare donc ce terme en deux, on note

$$f = \langle f \rangle + \delta f \quad (2.86)$$

Où $\langle f \rangle$ désigne la densité moyennée sur toutes les réalisations possibles de fluctuations, et donc de vecteurs d'ondes. Une fois l'expression (2.86) injectée dans l'équation de Vlasov, nous chercherons à résoudre l'équation pour $\langle f \rangle$ en effet δf n'est pas pertinent pour nous étant donné qu'un instrument de mesure ne détectera que la valeur moyenne du flux. Néanmoins nous allons voir qu'elle est corrélée non linéairement avec les fluctuations dans l'équation de Vlasov.

Réécriture de l'équation de Vlasov

On commence par moyenner l'équation (2.85) et remplacer f par (2.86) dans le dernier terme de gauche

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} + v\mu \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial Z} - \epsilon\Omega \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial \Phi} = S(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \left\langle \frac{1}{p^2} \partial_\sigma (p^2 g_\sigma (\langle f \rangle + \delta f)) \right\rangle \quad (2.87)$$

Le dernier terme se sépare en deux

$$\left\langle \frac{1}{p^2} \partial_\sigma (p^2 g_\sigma (\langle f \rangle + \delta f)) \right\rangle = \frac{1}{p^2} \partial_\sigma (\langle p^2 g_\sigma \rangle \langle f \rangle) + \frac{1}{p^2} \partial_\sigma \langle p^2 g_\sigma \delta f \rangle \quad (2.88)$$

L'avant dernier terme correspond à la moyenne des fluctuations, il est donc par définition nul puisqu'il n'impliquera que des termes de la forme $\langle \delta B \rangle$ et $\langle \delta E \rangle$. On arrive donc, en reprenant l'équation (2.85) et en y insérant l'équation (2.86) au système :

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} + v\mu \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial Z} - \epsilon\Omega \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial \Phi} = S(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{1}{p^2} \partial_\sigma \langle p^2 g_\sigma \delta f \rangle \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} + v\mu \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial Z} - \epsilon\Omega \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial \Phi} + \frac{1}{p^2} \partial_\sigma (p^2 g_\sigma \langle f \rangle) = S(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial \delta f}{\partial t} - v\mu \frac{\partial \delta f}{\partial Z} + \epsilon\Omega \frac{\partial \delta f}{\partial \Phi} - \frac{1}{p^2} \partial_\sigma (p^2 g_\sigma \delta f)$$

On soustrait ensuite les deux équations du système pour obtenir

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v\mu \frac{\partial \delta f}{\partial Z} - \epsilon\Omega \frac{\partial \delta f}{\partial \Phi} = \frac{1}{p^2} \partial_\sigma \langle p^2 g_\sigma \delta f \rangle - \frac{1}{p^2} \partial_\sigma (p^2 g_\sigma \langle f \rangle) - \frac{1}{p^2} \partial_\sigma (p^2 g_\sigma \delta f) \quad (2.90)$$

On utilise ensuite la propriété $\partial_\sigma (p^2 g_\sigma) = 0$ pour arriver à

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v\mu \frac{\partial \delta f}{\partial Z} - \epsilon\Omega \frac{\partial \delta f}{\partial \Phi} = \langle g_\sigma \partial_\sigma \delta f \rangle - g_\sigma \partial_\sigma \delta f - g_\sigma \partial_\sigma \langle f \rangle \quad (2.91)$$

La partie droite de l'équation fait intervenir des termes de la forme $\partial_\sigma \delta f$ en regard des termes $\partial_\sigma \langle f \rangle$. Nous allons ici considérer le cas d'une turbulence de faible amplitude, dans ce cas, en dessous d'un certain temps caractéristique les perturbations du champ auront beaucoup moins d'influence sur δf que sur $\langle f \rangle$. Au-delà de ce temps, l'approximation devient beaucoup moins certaine, δf variant de plus en plus avec les perturbations du champ. C'est une des conditions de l'approximation dite **approximation quasi-linéaire**. Cette approximation permet de fermer le système d'équations

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v\mu \frac{\partial \delta f}{\partial Z} - \epsilon\Omega \frac{\partial \delta f}{\partial \Phi} \approx -g_\sigma \partial_\sigma \langle f \rangle \quad (2.92)$$

C'est une équation aux dérivées partielles qui peut être résolue par la méthode des courbes caractéristiques. On cherche une ligne caractéristique de coordonnée affine s sur laquelle l'équation différentielle aux dérivées partielles est réduite à une équation différentielle ordinaire, dans ce cas :

$$\frac{d\delta f}{ds} = -g_\sigma \partial_\sigma \langle f \rangle \quad (2.93)$$

Pour $t > t_0$. On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$\frac{d\delta f}{ds} = 0 \quad (2.94)$$

La dérivée de δf le long de la courbe caractéristique est donnée par

$$\frac{d}{ds} \delta f(t(s), Z(s), \Phi(s)) = \frac{dt}{ds} \frac{\partial \delta f}{\partial t} + \frac{dZ}{ds} \frac{\partial \delta f}{\partial Z} + \frac{d\Phi}{ds} \frac{\partial \delta f}{\partial \Phi} \quad (2.95)$$

On obtient donc, par identification avec l'équation (2.92)

$$\begin{cases} dt/ds = 1 \\ dZ/ds = v\mu \\ d\Phi/ds = -\epsilon\Omega \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} t = s + t_0 \\ Z = z_0 + v\mu s = z_0 + v\mu(t - t_0) \\ \Phi = \Phi_0 - \epsilon\Omega(t - t_0) \end{cases} \quad (2.96)$$

où les coordonnées $(x_0, y_0, z_0, \Phi_0, \mu, p)$, indiquent les coordonnées initiales. Du fait des approximations, on remarque que les courbes caractéristiques correspondent à des orbites de particules non perturbées, c'est une conséquence de l'approximation quasi-linéaire.

Le long de la courbe caractéristique, par définition la dérivée $d\delta f(s)/ds$ est nulle donc la solution

correspond à une constante, la solution est donc donnée par :

$$\delta f(s) = \delta f(t_0) \quad (2.97)$$

On obtient la solution totale en ajoutant la solution particulière :

$$\delta f(t) = \delta f(t_0) - \int_{t_0}^t ds g_v(s) \partial_\sigma \langle f(x_v, s) \rangle \quad (2.98)$$

Cette intégrale est à calculer le long des courbes caractéristiques et donc le long des coordonnées que nous venons de déterminer. Enfin on considère qu'en dessous du temps t_0 les fluctuations sont complètement décorréliées du champ turbulent, de ce fait, $\langle \delta f(t_0) g_\sigma \rangle = 0$. En utilisant cette propriété et en injectant la solution de l'équation différentielle dans l'équation (2.89) on a

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} + v\mu \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial Z} - \epsilon\Omega \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial \Phi} = S(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{1}{p^2} \partial_\sigma \left\langle p^2 g_\sigma \int_{t_0}^t ds g_v(s) \partial_\sigma \langle f(x_v, s) \rangle \right\rangle \quad (2.99)$$

Finalement, on suppose que pour les temps très courts, c'est à dire $t \ll t_0$, la fonction de corrélation est négligeable devant sa valeur à $t > t_0$, on s'autorise donc à porter la borne inférieure de l'intégrale à zéro.

L'équation peut alors être réécrite

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} + v\mu \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial Z} - \epsilon\Omega \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial \Phi} = S(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{1}{p^2} \partial_\sigma \left(p^2 \int_0^t ds \langle g_\sigma(t) g_v(s) \rangle \partial_\sigma \langle f(x_v, s) \rangle \right) \quad (2.100)$$

On suppose que sur l'intervalle $[0, t]$, la fonction $\langle f \rangle$ varie très peu, dans ce cas on considère que $\langle f(x_v, s) \rangle$ est quasiment équivalente à $\langle f(x_v, t) \rangle$. On définit les coefficients :

$$D_{\sigma v} = \int_0^t ds \langle g_\sigma(t) g_v(s) \rangle \quad (2.101)$$

comme étant **les coefficients de Fokker-Planck**. Pour des perturbations très faibles, on peut se permettre de calculer cette intégrale le long des orbites non perturbées. On obtient ainsi une équation de Fokker-Planck caractéristique de la diffusion. Cette diffusion est caractérisée par les coefficients $D_{\sigma v}$. Le calcul explicite des termes g_σ montre qu'il sont réels, on a donc $g_\sigma = g_\sigma^*$. On suppose qu'il existe un temps au-delà duquel la fonction de corrélation devient négligeable. Alors dans ce cas on peut donc ramener la borne supérieure de l'intégrale à l'infini dans le calcul des coefficients de Fokker-Planck, que nous écrivons

$$D_{\sigma\nu} = \int_0^\infty ds \langle g_\sigma(t) g_\nu^*(s) \rangle \quad (2.102)$$

Ils dépendent des fonctions de corrélation des perturbations du champ, nous devons donc nous intéresser au calcul de ces fonctions. D'autre part, pour alléger les notations nous écrirons pour la suite, $\langle f \rangle = f_0$.

L'équation de Fokker-Planck obtenue grâce à la théorie quasi-linéaire est la suivante :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f_0}{\partial Z} - \epsilon\Omega \frac{\partial f_0}{\partial \Phi} = S(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{1}{p^2} \partial_\sigma (p^2 D_{\sigma\nu} \partial_\nu f_0) \quad (2.103)$$

Il est important de noter que les coefficients $D_{\sigma\nu}$ obtenus ne sont pas les coefficients de diffusion macroscopiques dans le référentiel du laboratoire. Pour obtenir ces coefficients macroscopiques, il faut considérer que pour les temps suffisamment longs, l'équation devient isotrope. On cherche alors une solution pour la densité f_0 séparée en une solution isotrope et un reste anisotrope.

$$f_0 = M(\mathbf{x}, p, t) + G(\mathbf{x}, p, \mu, \Phi, t) \quad (2.104)$$

Avec M , la densité moyennée sur les angles

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_{-1}^1 d\mu f_0 \quad (2.105)$$

Par conséquent, de (2.104) et (2.105) la moyenne de G sur les angles est nulle. En insérant cette équation dans l'équation (2.103), en moyennant sur μ et Φ et en y soustrayant l'équation (2.103), il est possible de réécrire l'équation de diffusion sous la forme

$$\frac{\partial M}{\partial t} - S(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{\partial}{\partial z} K_{zz} \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{1}{4p^2} \frac{\partial (p^2 v A_1)}{\partial p} \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial X} \left[K_{xx} \frac{\partial M}{\partial X} + K_{xy} \frac{\partial M}{\partial Y} \right] \quad (2.106)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial Y} \left[K_{yy} \frac{\partial M}{\partial Y} + K_{xy} \frac{\partial M}{\partial X} \right] + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left(p^2 A_2 \frac{\partial M}{\partial p} \right) + \frac{v}{4} \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial M}{\partial p} \quad (2.107)$$

Le cheminement pour arriver à ce résultat est décrit dans (Schlickeiser 1989) et implique des temps relativement longs pour que les particules puissent localement atteindre un équilibre quasi-isotrope.

Les coefficients de l'équation sont donnés par

$$K_{zz} = \frac{v^2}{8} \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{D_{\mu\mu}(\mu)} \quad (2.108)$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu D_{ij}(\mu) \text{ avec } i,j = x,y \quad (2.109)$$

$$A_1 = \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2) D_{\mu p}^2(\mu)}{D_{\mu\mu}} \quad (2.110)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \left[D_{pp}(\mu) - \frac{D_{\mu p}^2(\mu)}{D_{\mu\mu}(\mu)} \right] \quad (2.111)$$

Il est intéressant de remarquer que la diffusion de pitch angle engendre une diffusion le long de l'axe z . On remarque également des termes de convection et des termes de diffusion dans l'espace des impulsions. Ces termes sont ceux qui ont été discutés en section 1.5 (page 34).

Pour poursuivre notre analyse du coefficient de diffusion, on s'intéresse maintenant à l'expression des coefficients de diffusion en fonction de la perturbation du plasma. On utilise pour cela le formalisme détaillé en (Shalchi 2009). Les coefficients K correspondent aux coefficients de diffusion macroscopiques que nous connaissons. On se penche particulièrement sur la diffusion spatiale sans termes diagonaux, donc à K_{zz} , K_{xx} , K_{yy} . Le calcul de K_{zz} est lié à celui de $D_{\mu\mu}$. Ce dernier est donné par

$$D_{\mu\mu} = \int_0^\infty dt \langle \dot{\mu}(t) \dot{\mu}(0) \rangle \quad (2.112)$$

$$(2.113)$$

En effet en faisant le calcul de (2.85) on montre facilement que $g_\mu(t) = \dot{\mu}(t)$.

Pour le calcul de K_{xx} et K_{yy} , il faut passer par la définition classique du coefficient de diffusion.

Calcul de K_{ij}

La définition classique du coefficient de diffusion est

$$K_{xx} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\langle (\Delta X)^2 \rangle}{dt} \quad (2.114)$$

On a

$$\langle (\Delta X)^2 \rangle = \left\langle \left(\int_0^t d\tau \tilde{v}_x(\tau) \right)^2 \right\rangle \quad (2.115)$$

$$= \int_0^t d\tau \int_0^t d\zeta \langle \tilde{v}_x(\tau) \tilde{v}_x(\zeta) \rangle \quad (2.116)$$

Ici une tilde a été mise sur la vitesse car il ne s'agit pas de la vitesse de la particule mais de la vitesse de X , le centre de guidage. On remanie cette expression pour obtenir

$$\langle (\Delta X)^2 \rangle = 2 \int_0^t d\tau (t - \tau) \langle \tilde{v}_x(\tau) \tilde{v}_x(0) \rangle \quad (2.117)$$

Et donc

$$K_{XX} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} 2 \int_0^t d\tau (t - \tau) \langle \tilde{v}_x(\tau) \tilde{v}_x(0) \rangle \quad (2.118)$$

$$K_{XX} = \int_0^\infty d\tau \langle \tilde{v}_x(\tau) \tilde{v}_x(0) \rangle \quad (2.119)$$

Les équations du mouvement de la particule, issues de la deuxième loi de Newton nous donnent (dans le cas d'un champ électrique nul) :

$$\dot{v}_x = \Omega v_y + \Omega \left(v_y \frac{\delta B_z}{B_0} - v_z \frac{\delta B_y}{B_0} \right) \quad (2.120)$$

$$\dot{v}_y = -\Omega v_x + \Omega \left(v_z \frac{\delta B_x}{B_0} - v_x \frac{\delta B_z}{B_0} \right)$$

La quantité pertinente pour nous pour calculer l'intégrale (2.117) est \tilde{v} , que nous obtenons en moyennant la vitesse sur une période de giration :

$$\tilde{v}_i(\zeta) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_\zeta^{\zeta+T} dt v_i(t) \quad (2.121)$$

En résolvant les équations du mouvement (2.120) (leur solution est sinusoïdale), en insérant leur solution dans l'équation (2.121), et en considérant que le temps de variation des fluctuations est très

faible devant le temps de giration de la particule, on peut retrouver

$$\tilde{v}_x(t) = v_z \frac{\delta B_x}{B_0} - v_x \frac{\delta B_z}{B_0} \quad (2.122)$$

$$\tilde{v}_y(t) = v_z \frac{\delta B_y}{B_0} - v_y \frac{\delta B_z}{B_0} \quad (2.123)$$

D'autre part, il est possible de montrer que δB_z est beaucoup plus petit que les autres fluctuations (Shalchi 2009). Dans ce cas, la vitesse v_z , de la particule peut être associée à la vitesse du centre de sa trajectoire \tilde{v}_z .

Au final, on trouve pour les coefficients de diffusion K_{ij}

$$K_{ij} = \frac{1}{B_0^2} \int_0^\infty dt \langle \tilde{v}_z(t) \tilde{v}_z(0) \delta B_x(\mathbf{x}(t), t) \delta B_x(\mathbf{x}(0), 0) \rangle \quad (2.124)$$

Pour définir entièrement les coefficients de diffusion il faut donc calculer les fonctions de corrélation entre perturbations magnétiques. Cette fonction est au cœur de la détermination des coefficients de diffusion. On remarque qu'on obtient une fonction de corrélation entre 4 objets : deux vitesses et deux champs magnétiques. Nous verrons dans la section suivante que l'approximation quasi-linéaire peut nous conduire à ne traiter que la fonction de corrélation du champ magnétique. Cette fonction est donc cruciale, pour la calculer nous allons être amenés à faire certaines approximations notamment sur la géométrie de la turbulence.

3.4 La fonction de corrélation de la turbulence magnétique

La fonction de corrélation de la turbulence magnétique se charge de coder toutes les informations sur l'interaction de la turbulence avec elle-même. Ce tenseur est homogène à une énergie, il code donc non seulement la corrélation spatio-temporelle de la turbulence mais également sa dépendance en énergie. Cette dernière a été étudiée dans la section 3.2 (page 53). En faisant certaines approximations sur la géométrie de la turbulence on peut essayer d'exprimer les coefficients de diffusion des particules de notre plasma. Nous verrons que l'approximation quasi-linéaire échoue pour décrire la diffusion des particules du plasma perpendiculairement aux lignes de champ. Elle offre cependant une forme élégante du coefficient de diffusion parallèle. Il est possible de raffiner la théorie en réduisant les approximations faites. Dans ce cas un traitement numérique devient obligatoire et parfois long mais les modèles les plus aboutis fournissent une description satisfaisante des coefficients de diffusion. Ici nous décrirons seulement la théorie quasi-linéaire grâce au formalisme de (Shalchi 2009), et nous

nous contenterons d'évoquer les autres théories.

On commence par définir le tenseur de corrélation à deux points de la turbulence magnétique

$$R_{\ell m}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta B_{\ell}(\mathbf{x}, t) \delta B_m^*(\mathbf{x}_0, t_0) \rangle \quad (2.125)$$

D'une manière générale, pour traiter les problèmes de turbulence, il est plus commun de travailler avec la transformée de Fourier des perturbations électromagnétiques, et d'étudier ainsi la décomposition spectrale de la turbulence. On suppose pour cela qu'à des distances infinies le champ n'est plus corrélé, donc la fonction de corrélation s'annule. On postule aussi que cette fonction ne présente pas de discontinuité, on peut donc penser à priori qu'elle est normalisable, c'est pourquoi on suppose que sa transformée de Fourier est définie et que l'on peut la calculer. On pose

$$\delta B_{\ell}(\mathbf{x}, t) = \int d^3k \delta B_{\ell}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.126)$$

ce qui donne pour la fonction de corrélation

$$R_{\ell m} = \int d^3k \int d^3k' \langle \delta B_{\ell}(\mathbf{k}, t) \delta B_m^*(\mathbf{k}', t_0) \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}_0} \quad (2.127)$$

Ici, seule la turbulence homogène est considérée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'interaction entre les différents modes turbulents. Dans ce cas, on peut écrire

$$\langle \delta B_{\ell}(\mathbf{k}, t) \delta B_m^*(\mathbf{k}', t_0) \rangle = P_{\ell m}(\mathbf{k}, t, t_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.128)$$

D'autre part, on choisit comme conditions initiales $t_0 = 0$ et $\mathbf{x}_0 = 0$, ce qui permet de réécrire

$$R_{\ell m}(\mathbf{x}, t) = \int d^3k P_{\ell m}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.129)$$

Enfin, on suppose que chaque composante du tenseur de corrélation a le même comportement temporel, c'est à dire

$$P_{\ell m}(\mathbf{k}, t) = P_{\ell m}(\mathbf{k}, 0) \Gamma(\mathbf{k}, t) \quad (2.130)$$

On appelle Γ la fonction de corrélation dynamique, c'est elle qui code le comportement temporel de la fonction de corrélation. Pour plus de commodité nous écrirons le tenseur $P_{\ell m}(\mathbf{k}, 0)$ de cette façon : $P_{\ell m}(\mathbf{k})$. Il est qualifié de tenseur de corrélation magnétostatique. Il est appelé ainsi car il traite à lui seul une turbulence indépendante du temps.

On fait finalement l'hypothèse que le tenseur de corrélation magnétostatique est isotrope. Une

décomposition possible d'un tenseur isotrope de rang 2 est donnée par :

$$P_{\ell m}(\mathbf{k}) = A(k) \delta_{\ell m} + B(k) k_{\ell} k_m + C(k) \sum_n \epsilon_{\ell mn} k_n \quad (2.131)$$

C'est une forme très générale. Nous regardons dans l'encadré suivant comment la contraindre.

Réécriture du tenseur de corrélation magnétostatique

Pour contraindre ce tenseur on utilise dans un premier temps l'équation locale de Maxwell $\text{div } \delta \mathbf{B} = 0$ ce qui conduit à

$$\sum_i \partial_i \delta B_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.132)$$

Ce qui, en utilisant l'équation (2.126) donne

$$\sum_i k_i \delta B_i(\mathbf{k}) = 0 \quad (2.133)$$

En élevant cette équation au carré et en la moyennant, on obtient :

$$\sum_{\ell, m} k_{\ell} k_m P_{\ell m} = 0 \quad (2.134)$$

En prenant le produit scalaire de $k_m \delta B_m$ et $k_{\ell} \delta B_{\ell}$ et en sommant sur les composantes du tenseur, on obtient :

$$B(k) = -\frac{A(k)}{k^2} \quad (2.135)$$

D'autre part, on peut montrer que $P_{\ell m} = P_{m\ell}^*$ ce qui permet de montrer que $A(k)$ est réelle et $C(k)$ est imaginaire pur. Il est alors possible de réécrire $C(k)$

$$C(k) = i A(k) \frac{\sigma(k)}{k} \quad (2.136)$$

Avec $\sigma(k)$ réelle. Ce qui conduit à la paramétrisation suivante du tenseur de corrélation magnétostatique :

$$P_{\ell m}(\mathbf{k}) = A(k) \left[\delta_{\ell m} - \frac{k_{\ell} k_m}{k^2} + i \sigma(k) \sum_n \epsilon_{\ell mn} \frac{k_n}{k} \right] \quad (2.137)$$

C'est en faisant des approximations sur la turbulence qu'il est possible de déduire les formes de $A(k)$ et $\sigma(k)$.

Ce calcul est fait dans un cas isotrope mais il s'avère qu'une telle forme de tenseur est également valide pour une turbulence axisymétrique. L'axe de symétrie naturel émergeant est identifié avec la direction de champ magnétique moyen uniforme, dans notre cas l'axe z . Et le tenseur s'écrit :

$$P_{\ell m}(\mathbf{k}) = A(k_{\parallel}, k_{\perp}) \left[\delta_{\ell m} - \frac{k_{\ell} k_m}{k^2} + i \sigma(k_{\parallel}, k_{\perp}) \sum_n \epsilon_{\ell m n} \frac{k_n}{k} \right] \quad (2.138)$$

Ce terme n'est pas évident à traiter dans les calculs analytiques, c'est pourquoi pour le simplifier il est possible de négliger le terme $\sigma(k)$ désignant l'hélicité magnétique. C'est un terme non trivial qui indique la complexité de la structure du champ magnétique prenant notamment en compte ses boucles et ses torsions. Dans le cadre de turbulence de faible amplitude il est négligeable.

Le tenseur que nous utiliserons finalement est le suivant

$$P_{\ell m}(\mathbf{k}) = A(k_{\parallel}, k_{\perp}) \left[\delta_{\ell m} - \frac{k_{\ell} k_m}{k^2} \right] \quad (2.139)$$

Il reste à déterminer la forme de $A(k_{\parallel}, k_{\perp})$. Ce terme dépend de la géométrie de la turbulence et du spectre de cette dernière. Pour la géométrie, deux modèles sont souvent considérés. Le premier est une turbulence unidimensionnelle (appelée slab), qui ne dépend que d'une seule coordonnée. La seule solution pour garder la symétrie axiale est de choisir la coordonnée z , dans ce cas : $\delta B_i^{\text{slab}}(\mathbf{x}) = \delta B_i^{\text{slab}}(z)$. Cette situation correspond à un alignement des vecteurs d'ondes parallèlement au champ moyen $B_0 \mathbf{e}_z$. L'autre modèle considère une turbulence complètement perpendiculaire aux lignes de champ, qui ne dépend donc que des coordonnées x et y , les vecteurs d'ondes sont alignés perpendiculairement au champ moyen.

On utilise donc deux paramétrisations pour la fonction A

$$\begin{aligned} A^{\text{slab}}(k_{\parallel}, k_{\perp}) &= g^{\text{slab}}(k_{\parallel}) \frac{\delta(k_{\perp})}{k_{\perp}} \\ A^{2D}(k_{\parallel}, k_{\perp}) &= g^{2D}(k_{\perp}) \frac{\delta(k_{\parallel})}{k_{\parallel}} \end{aligned} \quad (2.140)$$

Les constantes apparaissant dans ces paramétrisations permettent de faire disparaître le terme k_{\perp} , qui émergera dans les intégrales faisant intervenir A^i . Pour décrire correctement la turbulence, il faudrait

un modèle dépendant des trois coordonnées. Une simplification de ce problème consiste à considérer que la turbulence totale est une superposition des deux modèles précédents.

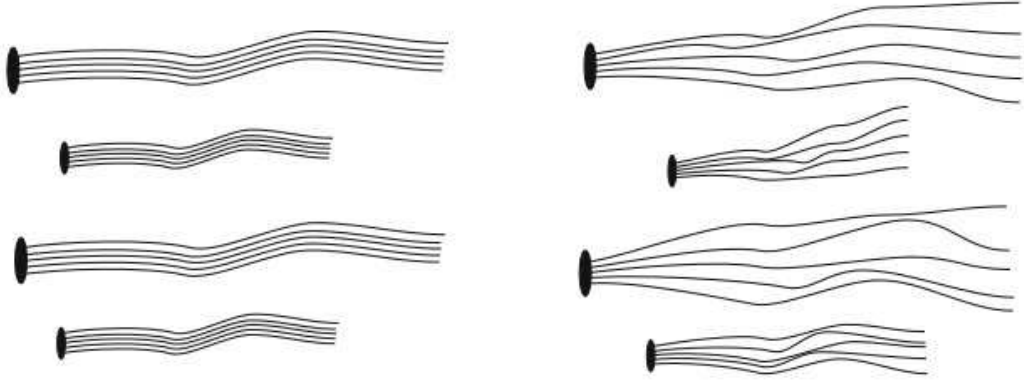


FIGURE 2.12: A gauche une perturbation dans le modèle slab, a droite le modèle composite slab/2D (Shalchi 2009)

Le choix de l'homogénéité du tenseur de corrélation magnétique n'est pas anodin, en effet il nous permet d'assurer la décorrélation des dimensions spatiales, et donc d'avoir directement

$$P_{\ell m} = P_{\ell m}^{\text{slab}}(\mathbf{k}) + P_{\ell m}^{2D}(\mathbf{k})$$

sans mixitude des tenseurs.

Dans les paramétrisations proposées, la fonction g se charge de décrire le spectre de la turbulence. Pour le paramétrer, il faut se pencher sur la turbulence. Dans la section 3.2 (page 53) nous avons vu les trois régimes de turbulence. Le premier régime correspond aux petites fréquences, correspondant aux grandes échelles spatiales. C'est le domaine énergétique de la turbulence. À ces échelles, la perturbation a tendance à gagner de l'énergie. Par commodité le spectre de cette zone est ici décrit par une constante. Puis à partir d'une certaine échelle spatiale, qu'on note ℓ , la turbulence commence à perdre de l'énergie. Cette énergie est transférée en cascade aux turbulences de plus petites échelles. Aux toutes petites échelles spatiales, ou aux grands nombres d'onde, la turbulence dissipe son énergie et la cascade cesse. Cette zone en énergie a un effet uniquement sur les particules avec un petit rayon de Larmor, donc aux très faibles énergies, et peut donc être négligée pour notre étude. Cette raison fait que le terme g se met sous la forme :

$$g^i \sim (1 + k_i^2 \ell_i^2)^{-\nu} \quad (2.141)$$

Avec l'indice i qui désigne soit le modèle "slab" auquel cas $k_i = k_{\parallel}$ soit le modèle "2D" auquel cas $k_i = k_{\perp}$. L'indice spectral ν dépend du spectre de turbulence choisi.

La paramétrisation utilisée est

$$g^{\text{slab}}(k_{\parallel}) = \frac{C(\nu)}{2\pi} \ell_{\text{slab}} \delta B_{\text{slab}}^2 (l + k_{\parallel}^2 \ell_{\text{slab}}^2)^{-\nu} \quad (2.142)$$

Le calcul du coefficient de normalisation $C(\nu)$ se fait en imposant $\delta B_{\text{slab}}^2 = \delta B_x^2 + \delta B_y^2 = R_{xx}(0) + R_{yy}(0)$. En effet on souhaite que les termes diagonaux du tenseur de corrélation magnétique soient proportionnels à l'énergie magnétique de la turbulence. Cette condition impose

$$C(\nu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu - 1/2)} \quad (2.143)$$

Avec Γ la fonction *Gamma* d'Euler.

Avec ces paramétrisations, on peut calculer explicitement le tenseur de corrélation magnétostatique, en partant de

$$R_{\ell m}(\mathbf{x}) = \int d^3k P_{\ell m}(k) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.144)$$

Et en y insérant (2.139), (2.140) et (2.142), on peut calculer $R_{\perp}^{\text{slab}}(z)$

$$R_{\perp}^{\text{slab}}(z) = \frac{2\delta B_{\text{slab}}^2}{\Gamma(\nu - 1/2)} \left(\frac{2\ell_{\text{slab}}}{z} \right)^{1/2-\nu} K_{\nu-1/2} \left(\frac{z}{\ell_{\text{slab}}} \right) \quad (2.145)$$

Avec K_{ν} la fonction de Bessel de deuxième espèce. Une étude de cette fonction de corrélation montre qu'elle décroît exponentiellement à grand z . L'échelle de cette décroissance est donnée par ℓ_{slab} .

Malheureusement $R_{\perp}^{2D}(z)$ pose plus de problèmes, pour entrevoir l'un d'entre eux, on se contente de donner l'expression de la longueur de corrélation de la turbulence

$$L_c \equiv \frac{1}{\delta B_{2D}^2} \int_0^{\infty} d\rho R_{\perp} \rho \quad (2.146)$$

Avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ce calcul conduit à

$$L_c \sim 4 C(\nu) \ell_{2D} \left(\frac{1}{2\nu} + \ln \frac{\Lambda}{\ell_{2D}} \right) \quad (2.147)$$

Ici Λ désigne l'échelle spatiale de la boîte d'intégration. On remarque que si $\Lambda \rightarrow \infty$ la longueur de corrélation est infinie, c'est pourquoi le calcul est fait dans une zone aux limites fixées. La longueur de corrélation infinie traduit un problème dans le phénomène de diffusion, l'approximation quasi-linéaire prédit un régime de propagation superdiffusif pour la diffusion parallèle. Un tel comportement pourrait avoir tendance à engendrer une anisotropie importante.

La turbulence dynamique

On aborde maintenant le terme de dépendance temporelle de la turbulence $\Gamma(\mathbf{k}, t)$, il existe plusieurs expressions pour ce dernier, issues de plusieurs études MHD. On distingue deux sortes de comportements, une première famille de fonctions de corrélation temporelle assure l'atténuation de la turbulence au cours du temps :

$$\Gamma(\mathbf{k}, t) = e^{-t/t_c} \text{ modèle "damping"} \quad (2.148)$$

$$\Gamma(\mathbf{k}, t) = e^{-(t/t_c)^2} \text{ modèle "random sweeping"} \quad (2.149)$$

Le modèle "damping" (atténuation en anglais) présente directement une forme d'atténuation en exponentielle avec une échelle de temps caractéristique t_c . Le modèle "random sweeping" (balayage aléatoire en anglais) lui présente une atténuation gaussienne autour de $t_0 = 0$.

Il existe aussi des turbulences avec des atténuations moins marquées, sous forme d'ondes plasma. En effet une étude perturbative des équations MHD révèle la présence d'ondes stables dans le plasma, appelées ondes d'Alfvén. Leur description est assurée par le terme :

$$\Gamma(\mathbf{k}, t) = e^{i\omega t - \gamma t} \text{ modèle "plasma wave"} \quad (2.150)$$

où ω décrit la pulsation du plasma. Elle obéit à une relation de dispersion, qui dépend du type d'ondes d'Alfvén qui se propage dans le milieu. Par exemple dans le cas d'ondes d'Alfvén transverses, cette relation est donnée par $\omega = \pm v_A k_{\parallel}$ avec v_A la vitesse des ondes d'Alfvén dans le plasma. Dans le cas des ondes rapides magnétosoniques, on a $\omega = v_A k$. Ces ondes peuvent aussi être atténuées dans le plasma avec un temps caractéristique d'atténuation $1/\gamma$.

Les fonctions de corrélation temporelle renseignent sur la vitesse de décorrélation des fluctuations au voisinage d'un vecteur d'onde \mathbf{k} . Le choix de la fonction à utiliser dépend beaucoup des échelles de temps associées à la turbulence. C'est pourquoi il faut essayer de discuter les échelles de temps caractéristiques et les processus mis en jeu en fonction des symétries de la turbulence.

3.5 L'approximation quasi-linéaire

L'approximation quasi-linéaire associe aux trajectoires réelles des particules leurs trajectoires non perturbées. La déviation qui existe entre la trajectoire non perturbée et la trajectoire perturbée augmente au cours du temps, donc plus le temps augmente et plus on a tendance à penser que la trajectoire calculée de la particule sera fautive. Un moyen de s'assurer que cette différence reste minime est de considérer une amplitude de fluctuations faible devant le champ moyen c'est-à-dire $\delta B_i \ll B_0$. En conservant ces approximations nous allons ici, pour finir, dériver les coefficients de propagation macroscopiques.

Dans ce cadre de travail, nous avons vu que le coefficient $D_{\mu\mu}$ est donné par

$$D_{\mu\mu} = \int_0^\infty dt \langle \dot{\mu}(t) \dot{\mu}(0) \rangle \quad (2.151)$$

Nous allons utiliser les contraintes sur la forme de la turbulence magnétique que nous venons de dériver pour écrire une forme explicite de ce coefficient de diffusion.

Calcul de $D_{\mu\mu}$

On peut montrer d'après l'équation (2.85), dans le cas où les fluctuations électriques sont nulles, que le coefficient $\dot{\mu}$ est donné par

$$\dot{\mu} = \frac{\Omega \sqrt{1 - \mu^2}}{B_0} \left[\delta B_y(\mathbf{x}_0) \cos \Phi(t) - \delta B_x(\mathbf{x}_0) \sin \Phi(t) \right] \quad (2.152)$$

Le calcul des courbes caractéristiques nous a permis de déterminer $\Phi(t) = \Phi_0 - \Omega t$. Pour calculer $D_{\mu\mu}$ il faut partir de l'équation (2.151) y insérer (2.152) et procéder à quelques changements de variables : il faut d'abord introduire les champs gauche et droite :

$$\begin{aligned} \delta B_L &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta B_x + i \delta B_y) \\ \delta B_R &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta B_x - i \delta B_y) \end{aligned} \quad (2.153)$$

ainsi que l'angle ψ , provenant de l'écriture de \mathbf{k} en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} k_x &= k_\perp \cos \psi \\ k_y &= k_\perp \sin \psi \\ k_z &= k_\parallel \end{aligned} \quad (2.154)$$

le coefficient W donné par

$$W = k_\perp R_L \sqrt{1 - \mu^2}$$

et l'identité

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(W) \exp[ik_\parallel v_\parallel t + in(\psi - \Phi_0 + \Omega t)] \quad (2.155)$$

Ces changements de variables moyennant quelques calculs conduisent à

$$D_{\mu\mu} = \frac{\Omega^2(1-\mu^2)}{2B_0^2} \Re \int_0^\infty \int d^3k \sum_{n,m=-\infty}^\infty J_n(W)J_m(W) e^{in(\psi-\Phi_0+\Omega t)-im(\psi-\Phi_0)+iv_{\parallel}k_{\parallel}} \quad (2.156)$$

$$\times \left[P_{RR}(\mathbf{k}, t) e^{-i\Omega t} - P_{RL}(\mathbf{k}, t) e^{2i\Phi_0-i\Omega t} - P_{LR}(\mathbf{k}, t) e^{-2i\Phi_0+i\Omega t} + P_{LL}(\mathbf{k}, t) e^{i\Omega t} \right]$$

La turbulence étant axisymétrique on peut moyenner sur Φ_0 . On ne donne pas ici de forme explicite du terme de dépendance temporelle pour l'instant.

Finalement le terme se réécrit

$$D_{\mu\mu} = \int d^3k \sum_n \alpha_n(\mathbf{k}) R_n(\mathbf{k}) \quad (2.157)$$

où

$$\alpha_n = \frac{\Omega^2(1-\mu^2)}{2B_0^2} \left(J_{n+1}^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) P_{RR}(\mathbf{k}) + J_{n-1}^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) P_{LL}(\mathbf{k}) \right. \quad (2.158)$$

$$\left. - J_{n+1} \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) J_{n-1} \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) (P_{RL}(\mathbf{k}) e^{2i\psi} + P_{LR}(\mathbf{k}) e^{-2i\psi}) \right)$$

Avec $R_n(\mathbf{k})$ donné par

$$R_n(\mathbf{k}) = \Re_e \left\{ \int_0^\infty dt e^{i(k_{\parallel} v_{\parallel} + n\Omega)t} \Gamma(\mathbf{k}, t) \right\} \quad (2.159)$$

C'est la fonction de résonance quasi-linéaire. Par exemple, pour une turbulence purement magnéto-statique $\Gamma = 1$ alors $R_n(\mathbf{k}) = \pi \delta(k_{\parallel} v_{\parallel} \mu + n\Omega)$. C'est une fonction de résonance extrêmement piquée. Elle illustre bien une interaction résonante entre la vitesse de la particule et le vecteur d'onde, avec comme condition

$$\frac{v_{\parallel}}{\Omega} = \frac{n}{k_{\parallel}}.$$

Donc la seule interaction possible intervient si la distance parcourue par la particule pendant une période non perturbée est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la turbulence. Le fait d'avoir choisi de poursuivre tout le calcul sur les orbites non perturbées engendre une fonction de résonance extrêmement piquée, en réalité la particule est constamment déviée, donc la vraie orbite devient de plus en plus incertaine (cet effet est absent à cause de l'approximation quasi-linéaire). Un des enjeux principaux d'une théorie de diffusion non linéaire est la détermination d'une fonction

de résonance plus réaliste. On peut montrer que le calcul des fonctions $D_{\sigma\nu}$ fait apparaître la même fonction de résonance.

Pour poursuivre le calcul des coefficients de diffusion, il faut s'astreindre à une géométrie de turbulence donnée, en se servant des fonctions de corrélation déjà calculées.

Modèle magnétostatique slab

On montre ici le cheminement vers le calcul des coefficients de diffusion parallèle et perpendiculaire dans le cadre du modèle magnétostatique slab. Il faut pour cela remplacer les fonctions $P_{\ell m}$ qui apparaissent dans le calcul (2.157) en considérant les approximations faites pour la géométrie de la turbulence. Ce qui permet d'arriver tous calculs faits à

$$D_{\mu\mu} = \frac{\pi C(\nu) \nu \delta B_{\text{slab}}^2}{l_{\text{slab}} B_0^2} (1 - \mu^2) \mu^{2\nu-1} R^{2\nu-2} (1 + \mu^2 R^2)^{-\nu} \quad (2.160)$$

On a introduit la rigidité sans dimension, $R = R_L / \ell_{\text{slab}}$ où R_L est le rayon de Larmor. On peut utiliser cette relation pour calculer le libre parcours moyen parallèle.

$$K_{\parallel}^{\text{slab}} = \frac{\nu^2}{8} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \mu^2)^2}{D_{\mu\mu}(\mu)} \quad (2.161)$$

On peut calculer cette intégrale dans les limites $K_{\parallel}^{\text{slab}}$ quand $R \rightarrow \infty$ et quand $R \rightarrow 0$. La première limite donne

$$K_{\parallel}^{\text{slab}}(R \gg 1) \approx \frac{\ell_{\text{slab}}}{16\pi C(\nu)} \nu \left(\frac{B_0}{\delta B_{\text{slab}}} \right)^2 R^2 \quad (2.162)$$

la deuxième limite :

$$K_{\parallel}^{\text{slab}} \approx \frac{\ell_{\text{slab}}}{16\pi C(\nu)} \nu \left(\frac{B_0}{\delta B_{\text{slab}}} \right)^2 R^{2-2\nu} \frac{2}{(1 - \nu)(2 - \nu)} \quad (2.163)$$

on peut recoller les deux solutions pour avoir une estimation approchée :

$$K_{\parallel}^{\text{slab}} \approx \frac{\ell_{\text{slab}}}{16\pi C(\nu)} \nu \left(\frac{B_0}{\delta B_{\text{slab}}} \right)^2 R^{2-2\nu} \left[\frac{2}{(1 - \nu)(2 - \nu)} + R^{2\nu} \right]. \quad (2.164)$$

La limite se fait pour $R \sim 1$ C'est à dire

$$\mathbf{p} \sim q B \ell_{\text{slab}} \quad (2.165)$$

Dans notre galaxie les valeurs typiques sont $B \sim 1 \text{ à } 0.4 \text{ nT}$, $\ell_{\text{slab}} \sim 2 \times 10^{18} \text{ cm}$ (Shalchi & Schlickeiser 2005) et nous considérons un proton. Dans ce cas, l'échelle d'énergie associée à la transition est d'environ $2 \times 10^{10} \text{ GeV}$. Le coefficient de diffusion étant dans la gamme d'énergie de la thèse est donc :

$$K_{\parallel}^{\text{slab}} \approx \frac{\ell_{\text{slab}}}{16\pi C(\nu)} \nu \left(\frac{B_0}{\delta B_{\text{slab}}} \right)^2 R^{2-2\nu} \frac{2}{(1-\nu)(2-\nu)} \quad (2.166)$$

qui peut être écrit sous la forme

$$K_{\parallel}^{\text{slab}} = K_0(\nu) \frac{V}{c} \mathcal{R}^{2-2\nu} \quad (2.167)$$

Avec \mathcal{R} la vraie rigidité de la particule. Dans l'approximation de Kolmogorov nous avons $2\nu = 5/3$. Le coefficient K_0 peut être calculé, pour cela on utilise la valeur de ℓ_{slab} calculée en (Shalchi & Schlickeiser 2005) qui vaut pour le milieu interstellaire $\ell_{\text{slab}} = 2 \times 10^{18} \text{ cm}$. L'expression de K_0

$$K_0 = \frac{c \ell_{\text{slab}}^{2\nu-1}}{16\pi} B_0^{2\nu} \delta B^{-2} \frac{2}{(1-\nu)(2-\nu)} \frac{2 \sqrt{\pi} \Gamma(\nu - 1/2)}{\Gamma(\nu)} \quad (2.168)$$

Pour un champ galactique de 0.4 nT et un rapport $\delta B_0/B_0 = 0.25$ (Shalchi & Schlickeiser 2005) (limite de la théorie quasi-linéaire), on peut évaluer K_0 à environ $8 \text{ kpc}^2 \cdot \text{Myr}^{-1}$. Cette valeur est extrêmement sensible au rapport $\delta B_0/B_0$ étant donné sa dépendance quadratique dans (2.168). Gardons cet ordre de grandeur en tête pour la suite et poursuivons le calcul du coefficient perpendiculaire. Le calcul de K_{\perp}^{slab} est lié à D_{xx} par

$$D_{xx} = \int_0^{\infty} dt \langle v_x(t) v_x(0) \rangle \quad (2.169)$$

Et

$$v_x = v_z \frac{\delta B_x(z)}{B_0} \quad (2.170)$$

L'intégration sur les courbes caractéristiques nous impose de travailler sur la courbe $z = z_0(t)$. On a sur cette courbe $v_z = \nu \mu$, qui peut donc être sorti de la fonction de corrélation.

$$D_{xx} = \frac{\nu |\mu|}{B_0^2} \int_0^{\infty} dz \langle \delta B_x(z) \delta B_x^*(0) \rangle \quad (2.171)$$

et

$$K_{\perp}^{\text{slab}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu D_{xx} \quad (2.172)$$

$$K_{\perp}^{\text{slab}} = \frac{\pi}{2} C(\nu) \ell_{\text{slab}} \nu \frac{\delta B_{\text{slab}}^2}{B_0^2} \quad (2.173)$$

Il est possible de montrer que ce coefficient de diffusion est directement en lien avec la diffusion perpendiculaire des lignes de champ magnétique. C'est cette dernière qui est responsable de la diffusion des particules chargées perpendiculairement aux lignes de champ. Ce coefficient représente environ 1% du coefficient de diffusion parallèle.

Modèle magnétostatique 2D

Le calcul des coefficients de diffusion du modèle magnétostatique 2D ne peut pas être mené analytiquement jusqu'au bout, mais on peut arriver à prédire son comportement. Le coefficient de diffusion du "pitch angle" se comporte comme

$$D_{\mu\mu} \sim \begin{cases} 0 & \text{si } n\Omega t = 2\pi m \\ t^{-1} & \text{si } n\Omega t \neq 2\pi m \end{cases} \quad (2.174)$$

Dans ce cas, lorsque $t \rightarrow \infty$, $D_{\mu\mu} \rightarrow 0$. Donc le coefficient de diffusion parallèle, qui dépend de $\int 1/D_{\mu\mu}$ diverge. Une étude du coefficient perpendiculaire révèle un comportement balistique de la particule, qui se traduit par un coefficient de diffusion extrêmement élevé, ce qui confirme la tendance déjà observée lors du calcul de la longueur de corrélation de la turbulence perpendiculaire dans le cas 2D.

Modèle composite

Le modèle composite est un modèle associant le modèle slab 1D et le modèle 2D. Ce calcul fait intervenir des termes de la forme

$$K_{\parallel}^{\text{comp}} = \frac{\nu^2}{4} \int_{-1}^1 d\mu \frac{(1 - \mu^2)^2}{D_{\mu\mu}^{\text{slab}} + D_{\mu\mu}^{\text{2D}}} \quad (2.175)$$

Le comportement rapporté en (2.174) montre que dans le cas du modèle composite, la contribution $D_{\mu\mu}^{\text{2D}}$ qui tend vers zéro sera dominée par le coefficient $D_{\mu\mu}^{\text{slab}}$. Donc la diffusion parallèle est dominée par la géométrie slab 1D, et l'équation ne souffre donc pas des problèmes de la géométrie pure 2D.

Cependant, le calcul du coefficient de diffusion perpendiculaire ne dépend pas de $1/D_{\mu\mu}$. Et nous avons vu que la diffusion perpendiculaire dans le modèle 2D est caractérisée par une diffusion balistique irréaliste. Dans le cadre du modèle composite il n'est donc pas possible de prédire le compor-

tement du coefficient perpendiculaire. Cependant, les simulations numériques de [Shalchi \(2009\)](#) ont montré un rapport de coefficient de diffusion

$$\frac{K_{\perp}}{K_{\parallel}} \approx 0.01 \quad (2.176)$$

L'approximation quasi-linéaire est donc un moyen correct de calculer un coefficient de diffusion parallèle censé dominer le transport. Néanmoins cette approximation ne permet pas de résoudre le problème de la diffusion perpendiculaire.

La forme du coefficient de diffusion utilisée dans la suite de cette thèse est très proche de celle dérivée en (2.164). Mais il ne faut pas le prendre pour argent comptant, en effet il semblerait que dans la galaxie les amplitudes des perturbations du champ magnétique soient de l'ordre de grandeur du champ lui-même, ce qui n'encourage pas l'utilisation de la théorie quasi-linéaire. Cependant en section 2 (page 143) nous montrons que le spectre du rayonnement cosmique correspond à une loi de puissance. Les théories de propagation montrent qu'un coefficient de la forme de (2.167) convient à la description de la diffusion des particules.

Ajoutons que le résultat (2.176) montre une tendance forte pour la dominance du coefficient de diffusion parallèle, ce qui masque le problème du calcul du coefficient de diffusion parallèle dans certaines géométries de turbulence. Pour finir, l'élégance de cette théorie, bien qu'inexacte, est le point de départ des théories non linéaires, en effet pour résoudre les problèmes de l'approximation quasi-linéaire il existe plusieurs méthodes. Il est possible de développer une théorie du transport non linéaire, au-delà de l'approximation quasi-linéaire, ou alors de ne plus considérer une turbulence purement magnétostatique, ce qui a pour effet de faire disparaître certaines divergences. On essaye dans la section suivantes de fournir les pistes pour essayer de résoudre l'équation de Vlasov relativiste dans le cadre d'approximations non linéaires.

Les théories de transport non linéaires

Les théories de transport non linéaires essaient d'aller plus loin que la théorie quasi-linéaire. La théorie quasi-linéaire postule que l'on doit avoir $\delta B/B_0 \ll 1$. Ces approximations ont conduit d'une part à des simplifications dans l'écriture de l'équation de Vlasov en négligeant par exemple la dérivée des variations de la densité de probabilité faisant intervenir les variations du champ. D'autre part faire l'hypothèse d'orbites non perturbées permet la simplification de l'écriture du tenseur de corrélation des vitesses, le transformant d'un tenseur à 4 éléments en un tenseur à 2 éléments. Dans cette section nous explorons brièvement les théories développées par certains auteurs pour aller au-delà de ces approximations.

La "non linear closure approximation" se penche sur le premier point $\delta B/B_0$. Au lieu de négliger directement le terme $g_{\sigma}\partial_{\sigma}\delta f$ par rapport aux variations de $\langle f \rangle$, on considère qu'au premier ordre

cette variation est proportionnelle à δf . Cette théorie ne donne pas de très bon résultats mais elle fait apparaître une fonction de résonance moins piquée ainsi qu'un temps caractéristique de diffusion. Ce temps caractéristique représente le temps au bout duquel la particule va quitter son orbite du fait des perturbations.

La théorie du "non linear guiding center", s'intéresse au tenseur de corrélation des vitesses. La théorie quasi-linéaire fait l'approximation $\tilde{v}_x = v_z \delta B_x / B_0$, dans cette nouvelle théorie, on considère une certaine dispersion en vitesse issue de l'éloignement de l'orbite non perturbée :

$$\tilde{v}_x = a v_z \frac{\delta B_x}{B_0} \quad (2.177)$$

Pour marquer l'effet de diffusion, il est postulé qu'au bout d'un temps infini, la vitesse doit être complètement décorrélée de sa valeur au temps zéro. Pour les orbites non perturbées on peut montrer que

$$\langle v_z(t) v_z(0) \rangle \sim 1 \quad (2.178)$$

Pour modéliser la décorrélation, on ajoute un terme d'atténuation dans la fonction de corrélation

$$\langle v_z(t) v_z(0) \rangle = \frac{v^2}{3} e^{-vt/\lambda_{||}} \quad (2.179)$$

Le facteur 1/3 vient du fait qu'il est considéré que quand $t \rightarrow \infty$ les vitesses se sont dispersées dans toute les directions de l'espace. Le tenseur de corrélation $\langle \tilde{v}_x(t) \tilde{v}_x(0) \rangle$, devient

$$a^2 \langle v_z(t) v_z(0) \delta B_x(t) \delta B_x^*(0) \rangle \quad (2.180)$$

Pour finir, afin de traiter le tenseur à quatre éléments on suppose que les corrélations des perturbations magnétiques sont décorrélées des corrélations des vitesses, le tenseur est donc séparé

$$a^2 \langle v_z(t) v_z(0) \delta B_x(t) \delta B_x^*(0) \rangle = a^2 \langle v_z(t) v_z(0) \rangle \times \langle \delta B_x(t) \delta B_x^*(0) \rangle \quad (2.181)$$

Ces hypothèses, dans le cadre d'une géométrie composite, forment une description relativement bonne de la diffusion perpendiculaire. Ce modèle peut être affiné, notamment dans la détermination des fonction de corrélation de vitesses. La version étendue de cette théorie consiste à prendre des paramétrisations de ces termes faisant intervenir D_{xx} , D_{yy} et $D_{\mu\mu}$. On obtient alors un modèle non linéaire qui améliore le "non linear guiding center".

Certaines théories vont encore plus loin et améliorent les problèmes que peuvent avoir les théories mentionnées. Mentionnons le travail de (Shalchi & Schlickeiser 2005) offrant une bonne description des coefficients de diffusion dans l'héliosphère avec la "weakly non linear theory". Sur la figure 2.13 on peut voir le succès de la théorie mais aussi les problèmes de la théorie quasi-linéaire pour $R < 1$.

Cette dernière figure nous permet d'illustrer le fait que, même si en apparence la théorie quasilinear nous offre un coefficient de diffusion correspondant à nos attentes, il est possible que l'indice spectral de la pente retrouvé ne soit pas directement proportionnel au 5/3 de Kolmogorov. C'est pourquoi dans cette thèse nous nous contenterons d'utiliser un coefficient de diffusion phénoménologique, qui permet de retrouver plus facilement les résultats des expériences.

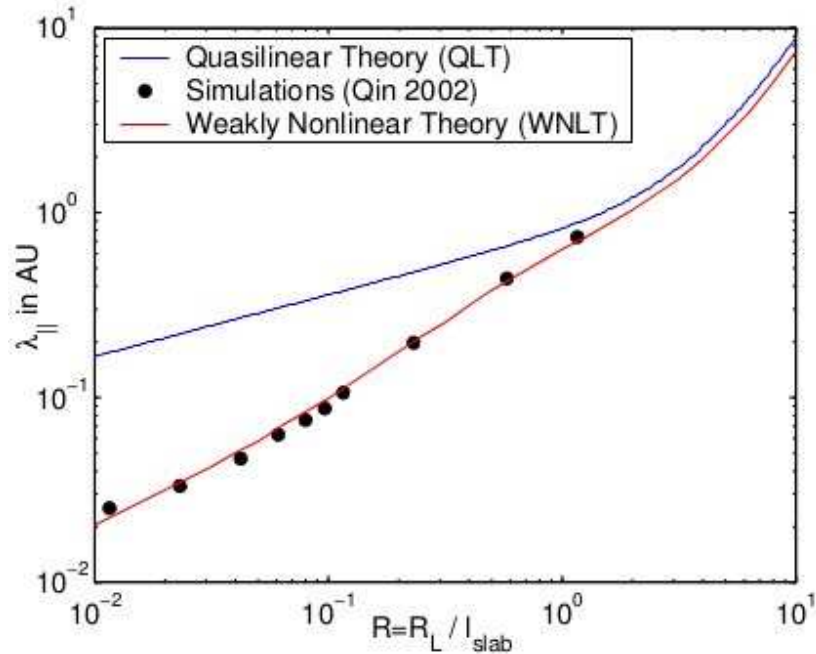


FIGURE 2.13: Estimations théoriques des libres parcours moyens des rayons cosmiques dans l'héliosphère (les libres parcours moyen son directement en lien avec le coefficient de diffusion) (Shalchi & Schlickeiser 2005)

RÉFÉRENCES

- Adriani, O., Barbarino, G. C., Bazilevskaya, G. A., et al. 2011, *Science*, 332, 69
- Amenomori, M., Ayabe, S., Bi, X. J., et al. 2006, *Science*, 314, 439
- Aspden, A., Nikiforakis, N., Dalziel, S., & Bell, J. 2008, *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 3, 103
- Beck, R. & Gaensler, B. M. 2004, *New Astronomy Reviews*, 48, 1289
- Beck, R. & Wielebinski, R. 2013, *ArXiv e-prints*, 1302.5663
- Berezinskii, V. S. & Ginzburg, V. L. 1990, *Astrophysics of cosmic rays* (Amsterdam ; New York ; New York, N.Y., U.S.A. : North-Holland ; Sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier Science Pub. Co.)
- Beringer, J., Arguin, J. F., Barnett, R. M., et al. 2012, *PRD*, 86
- Berkhuijsen, E. M., Beck, R., & Hoernes, P. 2003, *A&A*, 398, 937
- Biermann, L. 1951, *Zeitschrift für Astrophysik*, 28, 304
- Blandford, R. & Eichler, D. 1987, *Physics Reports*, 154, 1
- Blasi, P. & Amato, E. 2011, *JCAP*
- Booth, C. M., Agertz, O., Kravtsov, A. V., & Gnedin, N. Y. 2013, *ArXiv e-prints*, 1308.4974
- Caprioli, D., Amato, E., & Blasi, P. 2010, *Astroparticle Physics*, 33, 160
- Caprioli, D., Blasi, P., & Amato, E. 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 396, 2065
- Case, G. L. & Bhattacharya, D. 1998, *AAS*, 192, 893
- Cho, J. & Lazarian, A. 2006, *ApJ*, 638, 811
- Clercx, H. J. H., Maassen, S. R., & van Heijst, G. J. F. 1999, *Physics of Fluids*, 11, 611
- Davidson, P. A. 2011, *A voyage through turbulence* (Cambridge ; New York : Cambridge University Press)
- Diehl, R., Halloin, H., Kretschmer, K., et al. 2006, *Nature*, 439, 45
- Drury, L. O. 1983, *Reports on Progress in Physics*, 46, 973
- Ferriere, K. M. 2001, *Rev Mod Phys*, 73, 1031
- Ferrière, K. 2011, *MmSAI*, 82, 824
- Fletcher, A., Beck, R., Shukurov, A., Berkhuijsen, E. M., & Horellou, C. 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 412, 2396
- Gillessen, S., Eisenhauer, F., Trippe, S., et al. 2008, *ApJ*, 692, 1075
- Green, D. A. 2009, *BAS*, 37, 45
- Hale, G. E. 1908, *PASP*, 20, 287
- Hillas, A. M. 1984, *Ann Rev of A&A*, 22, 425
- Holman, J. P. 2010, *Heat transfer* (Boston, [Mass.] : McGraw Hill Higher Education)
- Hurt, R. 2013, *Carina–Sagittarius Arm*
- Iroshnikov, P. S. 1964, *Soviet Astronomy*, 7, 566

RÉFÉRENCES

- Jokipii, J. R. & Parker, E. N. 1969, *ApJ*, 155, 799
- Jones, F. 1999, in *ICRC 1999*, Vol. 4, 215
- Khusnutdinova K. 2009, Kolmogorov's 5/3 law
- Kolmogorov, A. 1941, *DoSSR*, 30, 301
- Kraichnan, R. H. 1965, *Physics of Fluids*, 8, 1385
- Lesur, G. & Longaretti, P.-Y. 2010, *ArXiv e-prints*, 1012.2690
- Longair, M. S. 2011, *High Energy Astrophysics*
- Maccione, L., Evoli, C., Gaggero, D., & Grasso, D. 2011, *Astrophysics Source Code Library*
- Majaess, D. 2010, *Acta Astronomica*, 60, 55
- Manchester, R. N., Hobbs, G. B., Teoh, A., & Hobbs, M. 2005, *VizieR Online Data Catalog*, 7245, 0
- Maurin, D. 2001, PhD thesis
- Maurin, D. 2011, in *crpa Conference*
- Maurin, D., Melot, F., & Taillet, R. 2013, *ArXiv e-prints*, 1302 :5525
- Maurin, D., Putze, A., & Derome, L. 2010, *A&A*, 516, 67
- Moskalenko, I. & GALPROP Team. 2013, *AAS*
- Norbury, J. W. & Townsend, L. W. 2007, *PRD*, 75, 34001
- Nordgren, T. E., Cordes, J. M., & Terzian, Y. 1992, *ApJ*, 104, 1465
- Parker, E. N. 1979, *Cosmical magnetic fields : their origin and their activity* (Clarendon Press)
- Reedy, R. C., Arnold, J. R., & Lal, D. 1983, *Science*, 219, 127
- Rybicki, G. B. & Lightman, A. P. 1986, *Radiative Processes in Astrophysics*
- Schlickeiser, R. 1989, *ApJ*, 336, 243
- Schlickeiser, R. 2002, *Cosmic Ray Astrophysics*
- Shalchi, A. 2009, *Nonlinear Cosmic Ray Diffusion Theories* (Springer New York)
- Shalchi, A. & Schlickeiser, R. 2005, *ApJ Letters*, 626, L97
- Shkarofsky, I. P., Johnston, T. W., & Bachynski, M. P. 1966, *The Particle Kinetics of Plasmas* (Addison-Wesley Pub. Co.)
- Shore, S. N. 2007, *Astrophysical Hydrodynamics : An Introduction*
- Strong, A. W. & Moskalenko, I. V. 1998, *ApJ*, 509, 212
- Taillet, R. 2010, PhD thesis
- Vanhollebeke, E., Groenewegen, M. A. T., & Girardi, L. 2009, *A&A*, 498, 95
- Veilleux, S., Cecil, G., & Bland-Hawthorn, J. 2005, *Ann Rev of A&A*, 43, 769
- Wainscoat, R. J., Cohen, M., Volk, K., Walker, H. J., & Schwartz, D. E. 1992, *ApJ*, 83, 111
- Weibel, E. S. 1959, *PRL*, 2, 83
- Yan, H. & Lazarian, A. 2008, *ApJ*, 673, 942
- Yoon, Y. S., Ahn, H. S., Allison, P. S., et al. 2011, *ApJ*, 728, 122
- Yusifov, I. & Kucuk, I. 2004, *A&A*, 422, 545

3

CONSTRUCTION DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION

Le phénomène de diffusion peut être étudié de plusieurs points de vue. Il s'agit d'un phénomène qui reste dans tous les cas conservatif et statistique. S'en suivent différentes manières de le décrire.

Une première approche, statistique, permet une construction directe de la solution de l'équation de diffusion en résolvant une équation simple. Cette méthode ne laisse pas apparaître les flux conservatifs, elle ne permet donc pas d'ajouter de processus autre que la diffusion. L'avantage est une interprétation microscopique du coefficient de diffusion.

L'autre approche, le point de vue conservatif utilise des règles de base de la physique et des observations phénoménologiques de la diffusion. Il suffit de partir de la deuxième loi de Fick et de la loi de conservation de la matière. Cette approche autorise n'importe quelle paramétrisation du coefficient de diffusion, car on ne le dérive pas directement de règles microscopiques.

1 LES DEUX LOIS DE FICK ET LA CONSERVATION DE LA MATIÈRE

1.1 La première loi de Fick

Adolf Fick était un physiologiste allemand, qui en 1855, introduisit des lois reliant la variation temporelle de la concentration d'une espèce chimique et la dérivée de sa variation spatiale (Fick 1855). La loi est dans un premier temps purement phénoménologique, mais nous pouvons l'interpréter du point de vue microscopique.

La première loi de Fick, en une dimension telle qu'elle a été introduite par Fick est donnée par

$$j(x, t) = -D \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} \quad (3.1)$$

Avec D , un coefficient appelé coefficient de diffusion, j le courant de particules, c'est-à-dire le flux de particules traversant une surface unité et N la concentration de particules donnée par

$$N = \frac{\text{Nombre de particules}}{V}$$

Et son équivalent en 3 dimensions :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} N \quad (3.2)$$

Démonstration de la première loi de Fick

Pour comprendre cette loi, à une dimension, considérons le problème suivant (décrit en (Lours 2010)) : Soit un ensemble de particules réparties dans une tranche infinitésimale de fluide centrée sur la position x au temps $t = 0$ et d'épaisseur 2λ . Ces particules ont un mouvement stochastique et sont susceptibles de subir des collisions les unes contre les autres, elles sont donc en régime diffusif. Chaque particule peut se déplacer vers la gauche ou vers la droite de la tranche de fluide de manière équiprobable. À chaque déplacement une particule se déplace de λ avant de subir une collision. Cette distance s'appelle le libre parcours moyen, c'est la distance moyenne entre deux collisions de particules. On s'intéresse au flux de particules total J , obtenu par :

$$J = J_+ - J_-$$

Où J_+ et J_- désignent respectivement le flux de particules allant vers la droite et vers la gauche traversant une surface S délimitant la tranche de fluide. Soit n_+ le nombre de particules se déplaçant vers la droite et n_- le nombre de particules se déplaçant vers la gauche. On définit Γ comme étant la fréquence de saut d'une particule. Alors le nombre de particules susceptibles de se déplacer par demie tranche est :

$$n_+ = N_+ S \lambda P_+ \quad (3.3)$$

$$n_- = N_- S \lambda P_- \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

Avec P_+ et P_- les probabilités de déplacement vers la droite ou vers la gauche. Ici elles sont de $1/2$ puisqu'il y a équiprobabilité. Ce déplacement se fait pendant un temps $t = \lambda/v$ avec v la vitesse moyenne des particules. Donc le flux de particules traversant la surface S par seconde est donné par :

$$\begin{aligned} J_+ &= \frac{v}{\lambda} \frac{N_+ S \lambda}{S} P_+ = \frac{N_+ v}{2} \\ J_- &= \frac{v}{\lambda} \frac{N_- S \lambda}{S} P_- = \frac{N_- v}{2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

On a donc, pour le flux total

$$J = \frac{(N_+ - N_-)v}{2} = v \frac{N(x - \lambda) - N(x + \lambda)}{2} \quad (3.7)$$

Et, étant données les symétries du problème, on a

$$J = -v \frac{2(N(x - \lambda) - N(x))}{2\lambda} \quad (3.8)$$

Lorsque $\lambda \rightarrow 0$ alors

$$J = -v\lambda \frac{dN}{dx} \quad (3.9)$$

En posant $D = \lambda v$ on arrive a

$$J = -D \frac{dN}{dx} \quad (3.10)$$

C'est la première loi de Fick qui donne l'expression du courant de diffusion. D'autre part le calcul nous donne une relation entre le coefficient de diffusion D et le libre parcours moyen λ . Ici nous avons montré $D = \lambda v$. C'est propre au cas à 1 dimension. En 2D et 3D, la probabilité de déplacement de la particule vers une direction donnée change, elle est de 1/4 en 2D et 1/6 en 3D. En démontrant la loi de Fick avec cette propriété on trouve à 3 dimensions :

$$D = \frac{\lambda v}{3} \quad (3.11)$$

et

$$\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}} N \quad (3.12)$$

Le signe moins assure un transfert de matière des zones les plus concentrées vers les zones les moins concentrées.

1.2 L'équation de continuité

L'équation de continuité assure la conservation de la quantité de matière dans un système conservatif. Elle est connue sous la forme

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}) + q_{\text{eff}} \quad (3.13)$$

Le terme q_{eff} décrit toutes les créations et pertes de masse du système par des sources ou phénomènes internes.

1.3 La deuxième loi de Fick

La deuxième loi de Fick relie le gradient du flux à la variation temporelle de la concentration en particule :

$$D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad (3.14)$$

La démonstration est élémentaire il suffit d'insérer le courant de diffusion issu de la première loi de Fick à l'intérieur de l'équation de continuité.

Démonstration de la deuxième loi de Fick

Considérons l'équation de continuité sans sources extérieures

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}) \quad (3.15)$$

Avec comme seul processus physique la diffusion. On remplace donc le courant \vec{j} par le courant calculé grâce à la première loi de Fick

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\text{div}\left(-D \overrightarrow{\text{grad}} \frac{dN}{dx}\right) \quad (3.16)$$

Or

$$\text{div}\left(-D \overrightarrow{\text{grad}} f\right) = \Delta f \quad (3.17)$$

On retrouve donc la deuxième loi de Fick :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N \quad (3.18)$$

C'est la forme la plus simple que nous puissions trouver pour une équation de diffusion. Résolvons-la pour une source ponctuelle qui produit toutes ses particules à un instant t_s et un temps t_s .

Résolution de l'équation purement diffusive

Considérons l'équation :

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = S(x, t) \quad (3.19)$$

Où $S(x, t)$ indique le terme source. Ici, pour une source ponctuelle $S(x, t) = \delta(x - x_s)\delta(t - t_s)$. On utilise la méthode des fonctions de Green pour résoudre cette équation (Barton 1989). On cherche donc une solution de la forme :

$$N(x, t) = \iint_{\mathcal{D}} \mathcal{G}(x', t'; x, t) S(x', t') dx' dt' \quad (3.20)$$

\mathcal{D} représente le domaine sur lequel on cherche à résoudre l'équation. $\mathcal{G}(x', t'; x, t)$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} = \delta(x - x') \delta(t - t') \quad (3.21)$$

Pour résoudre cette équation, on passe par les transformées de Fourier. Soit $\tilde{\mathcal{G}}(k, \tau)$ la transformée de Fourier de \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{G}}(k, \tau) e^{-ikx} e^{-i\tau t} dk d\tau \quad (3.22)$$

Et soit la transformée de Fourier du delta de Dirac :

$$\delta(x - x') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}} e^{-ik(x-x')} e^{-i\tau(t-t')} dk d\tau \quad (3.23)$$

En réinjectant ces deux dernières expressions dans (3.21) on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}} (-i\tau) \tilde{\mathcal{G}} e^{-ikx} e^{-i\tau t} dk d\tau + D \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}} \tilde{\mathcal{G}} k^2 e^{-ikx} e^{-i\tau t} dk d\tau \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}} e^{-ik(x-x')} e^{-i\tau(t-t')} dk d\tau \end{aligned} \quad (3.24)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} -i\tau \tilde{\mathcal{G}} + D k^2 \tilde{\mathcal{G}} &= e^{ikx'} e^{i\tau t'} \\ \tilde{\mathcal{G}}(k, \tau) &= \frac{1}{D k^2 - i\tau} e^{ikx'} e^{i\tau t'} \end{aligned} \quad (3.25)$$

On injecte le résultat obtenu dans (3.22) pour retrouver \mathcal{G}

$$\mathcal{G}(x, t; x', t') = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \frac{1}{D k^2 - i\tau} e^{-ik(x-x') - i\tau(t-t')} dk d\tau \quad (3.26)$$

Posons $t - t' = \zeta$ et $x - x' = \chi$. On a

$$\mathcal{G}(\chi, \zeta) = i \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \frac{1}{iD k^2 + \tau} e^{-ik\chi - i\tau\zeta} dk d\tau \quad (3.27)$$

Commençons par calculer la partie temporelle de l'intégrale. On remarque que le dénominateur de la fonction $\tilde{\mathcal{G}}$ présente un pôle simple en $\tau = -iDk^2$. C'est un pôle imaginaire pur. Pour choisir convenablement le contour il faut s'arrêter un peu sur le signe de ζ . Tout d'abord posons

$$\tau = \Re e[\tau] + i\Im m[\tau]$$

Dans ce cas l'intégrale temporelle devient :

$$I = \oint \frac{1}{iDk^2 + \tau} e^{-i\Re e[\tau]\zeta} e^{\Im m[\tau]\zeta} d\tau \quad (3.28)$$

Pour assurer la convergence de l'intégrale il faut choisir le contour d'intégration de sorte que le terme

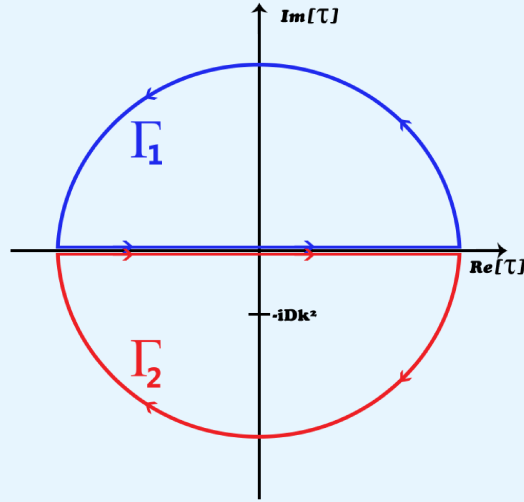
$$e^{\Im m[\tau]\zeta}$$

converge quand $\Im m[\tau]$ est grand, soit $\Im m[\tau]\zeta < 0$ et donc :

$$\text{Si } \zeta < 0 \text{ alors } \Im m[\tau] > 0 \quad (3.29)$$

$$\text{Si } \zeta > 0 \text{ alors } \Im m[\tau] < 0$$

Voici les contours que nous proposons en conséquence :



Le premier cas correspond à un contour refermé sur la partie supérieure du plan : le contour Γ_1 . Ce contour ne contient aucun pôle, le théorème des résidus et les Lemmes de Jordan nous assurent donc que cette intégrale sera nulle. Le deuxième contour : Γ_2 contient un résidu, on peut donc y appliquer le théorème adéquat. Vu le sens imposé pour le parcours de l'axe réel, le sens du contour est imposé comme étant anti-trigonométrique. Le théorème des résidus nous assure donc que la valeur de l'intégrale est donnée par

$$I = -2\pi i \sum \text{Res}$$

Le signe moins venant du sens de parcours.

Le résidu du pôle simple a est donné par

$$\text{Res}_a = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\tau \rightarrow (-iDk^2)} \frac{\tau + iDk^2}{iDk^2 + \tau} e^{-i\tau\zeta} \\ &= ie^{-Dk^2\zeta} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Donc

$$I = -2\pi i^2 e^{-Dk^2\zeta} \Theta(\zeta) = 2\pi e^{-Dk^2\zeta} \Theta(\zeta)$$

Pour finir en injectant ce résultat dans l'intégrale totale, on doit calculer

$$\mathcal{G}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-Dk^2\zeta} e^{-ikx} \Theta(\zeta) dk \quad (3.32)$$

On utilise la formule donnée en (3.323) de (Gradshteyn et al. 2007)

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-p^2 x^2 \pm qx) dx = \exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{p} \text{ avec } \operatorname{Re}(p^2) > 0$$

Pour obtenir

$$\mathcal{G}(x, t; x', t') = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t')}} \exp\left(\frac{-(x-x')^2}{4D(t-t')}\right) \Theta(t-t') \quad (3.33)$$

Pour finir

$$N(x, t) = \int_D \delta(x' - x_s) \delta(t' - t_s) \mathcal{G}(x - x', t - t') dx' dt' \quad (3.34)$$

Ce qui conduit à la solution de l'équation de diffusion pour une source ponctuelle :

$$N(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_s)}} \exp\left(\frac{-(x-x_s)^2}{4D(t-t_s)}\right) \Theta(t-t_s) \quad (3.35)$$

Ce calcul peut être conduit en 2D ou en 3D, et il est alors possible de montrer que pour le calcul de dimension n le résultat de la diffusion pour une source ponctuelle vaut :

$$N(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi D(t-t_s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|^2}{4D(t-t_s)}\right) \Theta(t-t_s) \quad (3.36)$$

La partie spatiale de cette fonction est une gaussienne centrée en x_s et c'est l'âge de la source et le coefficient de diffusion $D(t-t_s)$ qui déterminent la largeur de cette gaussienne. On comprend ici assez facilement le comportement du coefficient du diffusion : s'il augmente, la largeur de la gaussienne augmente, les particules ont alors plus de chance de s'écarter de la source. Un coefficient de diffusion élevé signifie donc des trajectoires de particules plus rectilignes. Plus les sources sont vieilles et plus

la fonction N s'étale, les particules sont alors diluées dans le milieu au cours du temps. On utilise les propriétés de la gaussienne pour déterminer la variance de x , c'est-à-dire $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ pour trouver

$$\text{VAR}(x) = 2D(t - t_s) \sim t \quad (3.37)$$

Un phénomène diffusif qui présente une variance proportionnelle à t est dit normal, c'est-à-dire que la diffusion classique telle que nous venons de la voir est adaptée pour décrire le phénomène. Dans les autres cas, si

$$\text{VAR}(x) \sim t^\alpha \text{ avec } 1 > \alpha > 2 \quad (3.38)$$

le phénomène est dit superdiffusif, les particules s'éloignent plus rapidement que dans le cas de la diffusion classique. Quand

$$\text{VAR}(x) \sim t^\alpha \text{ avec } 0 > \alpha > 1 \quad (3.39)$$

le régime est dit subdiffusif, les particules ont donc une progression anormalement chaotique. Enfin dans le cas d'une propagation quasi rectiligne, on a $\alpha \sim 2$, on parle alors de régime balistique ([Shalchi 2009](#)). Dans l'étude des rayons cosmiques on est le plus souvent confronté au cas de la diffusion normale ce qui facilite la modélisation du système physique.

2 INTERPRÉTATION STATISTIQUE DE LA DIFFUSION

On montre ici, en suivant la démonstration de ([Roll-Morton 2013](#)) que l'on peut dériver rapidement l'équation de diffusion par une interprétation statistique à 1 dimension. Soit une particule, située au point n . On veut calculer la probabilité pour que cette particule se trouve au point m au temps s . On note cette probabilité

$$P(n|m, s). \quad (3.40)$$

La particule est susceptible de se déplacer à chaque saut d'une distance λ , et le temps de déplacement est noté τ . Si on raisonne en terme de distance et de temps, on peut réécrire la probabilité (3.40) comme $P(n|m\lambda, s\tau)$. Sur un site donné, la probabilité de saut vers la gauche ou vers la droite est de $1/2$. On voudrait pouvoir effectuer un passage au continu sur le temps et l'espace. On cherche donc dans un premier temps à calculer

$$P(n|m, s + 1) - P(n|m, s)$$

pour pouvoir procéder à un passage au continu temporel. Pour arriver au point m au temps $s + 1$, la particule au temps s provient soit du point $m + 1$ et a sauté vers m au temps $s + 1$, soit du point $m - 1$ et a sauté vers m au temps $s + 1$. On peut donc écrire :

$$P(n|m, s + 1) = P(m + 1|m, s)P(n|m + 1, s) + P(m - 1|m, s)P(n|m - 1, s) \quad (3.41)$$

Or $P(m + 1|m, s) = P(m - 1|m, s) = \frac{1}{2}$ donc :

$$P(n|m, s + 1) = \frac{1}{2}(P(n|m + 1, s) + P(n|m - 1, s)) \quad (3.42)$$

On peut donc réécrire

$$P(n|m, s + 1) - P(n|m, s) = \frac{1}{2}(P(n|m + 1, s) + P(n|m - 1, s) - 2P(n|m, s)) \quad (3.43)$$

On s'intéresse à la partie gauche de cette équation, lorsque $\tau \rightarrow 0$ on peut écrire

$$P(n|m, (s + 1)\tau) - P(n|m, s\tau) = \tau \frac{\partial P(n|m, s\tau)}{\partial t} \quad (3.44)$$

Pour la partie droite de l'équation, faisons le développement limité de $P(n|(m \pm 1)\lambda, s)$ autour de $\lambda \rightarrow 0$

$$P(n|(m \pm 1)\lambda, s) = P(n|m\lambda, s) \pm \lambda \frac{\partial P(n|m\lambda, s)}{\partial x} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 P(n|m\lambda, s)}{\partial x^2} \quad (3.45)$$

Ici il faut poursuivre le développement à l'ordre deux car le premier terme sera annulé dans la suite du calcul. En insérant (3.45) et (3.44) dans (3.42) on obtient

$$\frac{P(n|m, s\tau)}{\partial t} = \frac{\lambda^2}{2\tau} \frac{\partial^2 P(n|m\lambda, s)}{\partial x^2} \quad (3.46)$$

On note $n = x_0$, $s\tau = t$, $m\lambda = x$ et

$$D = \frac{\lambda^2}{2\tau}$$

et on retrouve directement l'équation de diffusion

$$\frac{P(x_0|x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x_0|x, t)}{\partial x^2} \quad (3.47)$$

Avec comme solution pour une source ponctuelle située en x_0 et $t = 0$

$$P(x_0|x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} \quad (3.48)$$

On peut interpréter la densité de particules N que nous avons trouvé de façon probabiliste. Si à l'instant $t = 0$ à la position $x = x_0$ on relâche N_0 particules, on aura

$$N = N_0 P(x_0|x, t)$$

particules à la position x et au temps t_0 . C'est la manière avec laquelle on interprète les fonctions de Green qui nous ont servi pour le calcul de N .

3 ANALOGIE AVEC LES AUTRES DOMAINES DE LA PHYSIQUE

Notons ici que, de par la construction de sa théorie, la diffusion est en fait très analogue à d'autres phénomènes physiques. On écrit la première loi de Fick :

$$\vec{J} = -D \overrightarrow{\text{grad}} N$$

On retrouve une relation analogue en électricité avec le vecteur densité de courant et la résistivité

$$\vec{J}_e = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} U$$

Où U représente le potentiel électrique. La résistivité électrique peut être traduite par une diffusion plus ou moins importante des électrons dans le milieu conducteur, il est donc tout à fait normal de retrouver un courant similaire à celui de la diffusion.

On trouve aussi en thermodynamique :

$$\vec{J}_q = -K \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Où \vec{J}_q est la densité de courant thermique et K la conductivité thermique. Ici l'analogie provient de la construction de l'équation de la chaleur de Fourier.

Les résolutions des équations qui en découlent dépendent des conditions aux limites des divers problèmes. Ces analogies sont intéressantes dans le traitement de nos équations, car une partie des problèmes que nous pouvons rencontrer ont parfois été traités en électricité ou en thermodynamique. On note par exemple l'utilisation de la méthode des images électriques comme résolution possible de l'équation de diffusion pour une source ponctuelle.

3.1 Construction du courant de convection

De la même façon que le courant de diffusion, on peut construire un courant de convection : soit un volume élémentaire $S dx$, le nombre de particules qu'il contient est

$$n = N S dx.$$

Considérons que ces particules sont animées d'un mouvement de convection perpendiculaire à la surface S , caractérisé par une vitesse $V(x)$. Le temps qu'il faut au volume de particules pour traverser la surface est

$$t = \frac{dx}{V(x)}$$

donc le flux de particules traversant la surface par seconde est simplement donné par

$$J_{\text{convection}} = \frac{n}{S} \frac{V(x)}{dx} = N dx \frac{V(x)}{dx} = V(x)N \quad (3.49)$$

Enfin dans nos problèmes, certains phénomènes de pertes et de gains énergétiques peuvent être écrits sous forme de courants. Mais nous avons pu voir dans la section 1 (page 24) que l'on peut les négliger. On ne calculera donc pas les courants associés.

Nous avons vu, à partir d'arguments physiques élémentaires, la construction des courants de conservation de matière. Ces courants insérés dans l'équation de continuité nous permettent de construire l'équation caractérisant une partie de notre problème physique. C'est ce que nous allons faire dans la partie suivante. À partir de l'équation de continuité nous allons inclure tous les effets physiques en jeu dans le milieu interstellaire.

4 DE LA DIFFUSION AU FLUX DE RAYONS COSMIQUES

Pour obtenir l'équation régissant la dynamique de notre système, on combine la première loi de Fick (3.10) (qui détermine la forme du courant de diffusion), le courant de convection et l'équation de continuité (3.13). Le terme source q_{eff} est séparé en 2 termes : celui d'accélération dans les vestiges de supernovæ q_{acc} et le terme de spallation q_{spal} . Le tout sera à résoudre dans une géométrie choisie

pour la galaxie. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= -\text{div}(\vec{J}_{\text{diffusion}} + \vec{J}_{\text{convection}}) + q_{\text{eff}} \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -\frac{\partial V_c(z)N}{\partial z} + \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}(DN)\right) + q_{\text{eff}}\end{aligned}\quad (3.50)$$

On suppose que le coefficient de diffusion D est homogène dans la galaxie, il ne dépend donc pas des coordonnées et il est isotrope. Mais ce n'est pas forcément vrai, nous avons vu son expression dans la section 3.4 (page 70). Il dépend beaucoup du sens des lignes de champ magnétique. La forme du champ magnétique discutée en section 1.2 (page 27) montre que le champ magnétique galactique est localisé dans le plan du disque et dans le halo. Dans cette étude, considérer une carte des lignes de champ magnétique ne permettrait pas de résoudre de façon analytique les équations de diffusion. Pour s'approcher d'un modèle plus réaliste, la symétrie la plus simple à envisager serait le cas d'un coefficient de diffusion différent hors du disque, mais il s'agit d'un raffinement du problème dont nous nous passerons. Il s'agit ici d'une hypothèse restrictive que nous devons garder à l'esprit. Cependant, dans le cadre d'une résolution semi-analytique, introduire trop de paramètres permet généralement trop de modèles. D'un point de vue rigoureux, la turbulence du milieu interstellaire est vraisemblablement anisotrope, il est donc tout à fait possible que les paramètres choisis dans le cadre de notre modèle soient faussés par rapport aux vrais paramètres de la galaxie. Mais retenons que le contexte de cette étude est, d'une part de confronter nos modèles aux travaux existants, mais d'autre part d'étudier des effets physique dans la galaxie relativement indépendant du champ magnétique, ce qui est possible avec notre choix. C'est pourquoi on considère, au premier ordre un coefficient de diffusion isotrope. Dans ce cas on a :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \partial_z(V_c N) - D \Delta N = q_{\text{eff}} = q_{\text{acc}} - q_{\text{spal}} . \quad (3.51)$$

L'équation ainsi obtenue nous permet d'exprimer la densité de rayons cosmiques dans la galaxie par GeV et par nucléon $N \equiv dn_p/dT_p$.

Les pertes et créations de matière sont décrites dans le chapitre 2 et sont directement injectées dans les termes q_{acc} et q_{coll} .

Les spallations de cosmiques sur le milieu interstellaire ont tendance à diminuer la quantité de cosmiques d'énergie inférieure à la dizaine de GeV. Ce terme de spallation est pris en compte comme un facteur source altérant la population de rayons cosmiques. Ces spallations ont lieu uniquement dans le milieu interstellaire et donc uniquement dans le disque galactique. C'est donc une fonction qui dépend de z .

$$q_{\text{spal}}(\mathbf{x}, t) = f_{\Gamma}(z) \Gamma_p \psi(\mathbf{x}, t) . \quad (3.52)$$

Avec Γ_p détaillé en section 1.6 (page 35) :

$$\Gamma_p = v_p \left(\sigma_{pH} n_H + \sigma_{pHe} n_{He} \right) , \quad (3.53)$$

Et $f_{\Gamma}(z)$ une fonction décrivant l'épaisseur de la zone du disque, soit

$$\begin{aligned} f_{\Gamma}(z) &= 2h\delta(z) \text{ pour un disque infiniment mince} \\ f_{\Gamma}(z) &= 2h\Theta(h-z)\Theta(z+h) \text{ pour un disque épais} \end{aligned} \quad (3.54)$$

$\Theta(x)$ représente la fonction de Heaviside. Comme nous avons vu dans le chapitre 2, les densités de protons cosmique et d'hélium cosmique, respectivement n_H et n_{He} sont évaluées à 0.9 et 0.1 cm⁻³.

Le terme source, incluant la distribution spatiale et temporelle des sources, trouve sa place dans le terme q_{acc} . Il dépend de la prescription sur les sources. Si on considère une distribution de sources continues alors il sera de la forme

$$q_{acc} = Q(E, t) f_{r,z} \quad (3.55)$$

où $Q(E)$ représente l'injection des rayons cosmiques, soit le nombre de rayons cosmiques par GeV et $f_{r,z}$ représente la distribution de sources en considérant une symétrie cylindrique. Dans le cadre d'une injection ponctuelle le terme d'accélération sera

$$q_{acc} = Q(E, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{source}) \quad (3.56)$$

Pour finir, comme expliqué dans la section 1.3 (page 30), le vent convectif est pris comme étant vertical et uniforme.

$$V_C(z) = V_C \text{sgn}(z) . \quad (3.57)$$

Pour obtenir le flux de rayons cosmiques au niveau du Système solaire à partir de la densité, il faudrait définir un angle solide à travers lequel nous recevons les rayons cosmiques. Dans notre cas nous nous intéressons au flux de rayons cosmiques par stéradian (ce qui correspond à la forme des résultats donnés par les expériences), il faut donc diviser la densité par un facteur 4π . Enfin, comme on cherche un flux, il faut multiplier la densité de rayons cosmiques par leur vitesse, on obtient donc

$$\Phi = \frac{v_p}{4\pi} \times N \quad (3.58)$$

On exprimera le plus souvent ce flux en GeV/nucléons. Cette affirmation n'aura d'intérêt que lorsqu'on s'intéressera au flux d'hélium puisque, par définition, le flux de protons en GeV par nucléon est égal au flux de protons en GeV.

On peut donc avec la connaissance de tous ces processus construire l'équation maîtresse de la diffusion des rayons cosmiques dans la galaxie. La résolution de cette équation dépendra de la géométrie choisie pour la galaxie (disque mince ou disque épais), de la forme du terme source et de la prescription prise pour le régime de propagation (stationnaire ou non). Dans la section suivante, plus calculatoire, nous allons résoudre cette équation pour chacune de ces prescriptions et discuter les

résultats.

RÉFÉRENCES

- Barton, G. 1989, Elements of Green's functions and propagation : potentials, diffusion, and waves (Oxford ; New York : Clarendon Press ; Oxford University Press)
- Fick, A. 1855, Annalen der Physik, 170, 59–86
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Jeffrey, A., & Zwillinger, D. 2007, Table of Integrals, Series, and Products
- Longair, M. S. 2011, High Energy Astrophysics
- Lours, P. 2010, Science des Matériaux, http://nte.enstimac.fr/SciMat/co/SciMat_web.html
- Roll-Morton. 2013, Mouvement brownien
- Schlickeiser, R. 2002, Cosmic Ray Astrophysics
- Shalchi, A. 2009, Nonlinear Cosmic Ray Diffusion Theories (Springer New York)
- Taillet, R., Villain, L., & Febvre, P. 2008, Dictionnaire de physique (Bruxelles : De Boeck)

4

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION

Dans cette partie nous allons résoudre l'équation de diffusion pour plusieurs géométries de galaxie et plusieurs régimes de propagation. On rappelle l'expression générale de cette équation :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \partial_z(V_C N) - D \Delta N = q_{\text{eff}} = q_{\text{acc}} - q_{\text{col}} . \quad (4.1)$$

Dans un premier temps, nous considérerons les prescriptions les plus simples, nous résoudrons donc cette équation dans le cadre du modèle stationnaire, avec une distribution continue de sources en considérant un disque de matière galactique infiniment mince. Cette approche a déjà été utilisée à plusieurs reprises ([Maurin 2001](#)). Les solutions sont généralement connues mais les méthodes parfois moins. Nous commencerons donc par détailler cette résolution. Après avoir discuté brièvement le résultat et commenté les différents effets physiques, nous procéderons à la même résolution dans le cadre d'un disque de matière épais. Moins courante, cette résolution plus lourde du point de vue calculatoire, montrera que l'approximation d'un disque de matière infiniment mince est excellente. Nous introduirons ensuite dans ce modèle des sources ponctuelles. Ces deux derniers résultats trouvent leur intérêt dans l'étude de l'anisotropie du rayonnement cosmique, mais nous les plaçons ici pour comparer les différents modèles. Pour finir nous nous affranchirons de l'approximation stationnaire afin de résoudre l'équation avec des sources ponctuelles non stationnaires : ce modèle s'appelle le modèle de la myriade.

1 L'ÉQUATION DE DIFFUSION DANS LE MODÈLE STATIONNAIRE

Nous travaillons ici dans le cadre d'une théorie stationnaire avec une distribution continue de sources. On considère une symétrie cylindrique pour la répartition de sources et le coefficient de diffusion. On peut donc adopter la symétrie cylindrique pour la résolution. Nous devons donc travailler avec l'équation

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \partial_z(V_C N) - D \Delta N + 2h\delta(z)\Gamma_p N = q(r)f(z) \quad (4.2)$$

Ici $q(r)$ indique le terme source radial et $f(z)$ le terme source le long de l'épaisseur de la galaxie, qui indiquent la production de protons galactiques. $q(r)$ est défini par :

$$q(r) = q_0 f_r(r)$$

Ici, $f_r(r)$, indique la distribution radiale de sources. On impose

$$\int r f_r(r) dr = 1$$

q_0 est alors exprimé en $\text{kpc}^{-3} \text{s}^{-1}$. Il indique la production de protons par seconde et par unité de surface dans la galaxie.

Pour résoudre cette équation dans le cadre stationnaire, on postule

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 0$$

D'autre part on impose, qu'au-delà de l'étendue du halo magnétique, les particules sont libres et s'échappent de la galaxie, soit

$$\begin{aligned} N(r = R, z) &= 0 \\ N(r, z = L) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Résolution de l'équation stationnaire

Étant données les symétries étudiées, on se place en coordonnées cylindriques pour résoudre cette équation. Ce qui donne

$$-\partial_z (V_C N) + D \left(\partial_r^2 N + \frac{1}{r} \partial_r N + \partial_z^2 N + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 N \right) - 2 h \delta(z) \Gamma_p N = -q(r) f(z) \quad (4.4)$$

On utilise la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation sans second membre. On pose

$$N(r, \theta, z) = R(r) \Theta(\theta) Z(z)$$

Puis, en injectant dans l'équation initiale

$$-R \Theta \partial_z \left(\frac{V_C}{D} Z \right) + \Theta Z \partial_r^2 R + \Theta Z \frac{1}{r} \partial_r R + R \Theta \partial_z^2 Z + R Z \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \Theta - 2 h \delta(z) \frac{\Gamma_p}{D} R \Theta Z = 0 \quad (4.5)$$

On divise ensuite l'équation obtenue par $R(r) \Theta(\theta) Z(z)$

$$-\frac{1}{Z} \partial_z \left(\frac{V_C}{D} Z \right) + \frac{1}{R} \partial_r^2 R + \frac{1}{R} \frac{1}{r} \partial_r R + \frac{1}{Z} \partial_z^2 Z + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \Theta - 2 h \delta(z) \frac{\Gamma_p}{D} = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{R} \partial_r^2 R + \frac{1}{R} \frac{1}{r} \partial_r R + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \Theta = \frac{1}{Z} \partial_z \left(\frac{V_C}{D} Z \right) - \frac{1}{Z} \partial_z^2 Z + 2 h \delta(z) \frac{\Gamma_p}{D}$$

La partie de gauche ne dépend que de θ et de r et la partie de droite ne dépend que de z . Chaque partie est donc égale à une constante $-\beta^2$. Donc

$$\frac{1}{R} \partial_r^2 R + \frac{1}{R} \frac{1}{r} \partial_r R + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \Theta = -\beta^2 \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{R} \partial_r^2 R + \frac{1}{R} \frac{1}{r} \partial_r R = -\frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \Theta - \beta^2$$

$$r^2 \frac{1}{R} \partial_r^2 R + r \frac{1}{R} \partial_r R + r^2 \beta^2 = -\frac{1}{\Theta} \partial_\theta^2 \Theta$$

On utilise ici le même ansatz pour obtenir finalement l'équation

$$r^2 \frac{1}{R} \partial_r^2 R + r \frac{1}{R} \partial_r R + r^2 \beta^2 = \nu^2 \quad (4.8)$$

$$r^2 \partial_r^2 R + r \partial_r R + (r^2 \beta^2 - \nu^2) R = 0 \quad (4.9)$$

On pose $x = r\beta$ et $y(x) = R(x/\beta)$ donc

$$r \partial_r R = r \frac{\partial x}{\partial r} \partial_x y = r\beta \partial_x y = x \partial_x y \quad (4.10)$$

$$r^2 \partial_r^2 R = x^2 \partial_x^2 y \quad (4.11)$$

L'équation devient :

$$\partial_x^2 y + \frac{1}{x} \partial_x y + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (4.12)$$

Pour faciliter la résolution nous nous appuyons sur la méthode développée dans ([Kibler 2001](#)). Cette

équation peut être mise sous la forme :

$$\partial_x^2 y + p(x) \partial_x y + q(x)y = 0$$

Dans notre cas, les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ présentent des points singuliers ($x_0 = 0$), on ne peut donc pas construire directement de solution de l'équation différentielle sous forme de série de Laurent. $x_0 = 0$ est un pôle simple de p , et un pôle double de q (si $\nu \neq 0$) ou alors un point régulier de q dans le cas où $\nu = 0$. Ces conditions font que x_0 est un point singulier non essentiel de l'équation. Dans ce cas, on peut appliquer le théorème de Fuchs : on cherche une solution de la forme $y(x) = x^s f(x)$, avec $f(0) \neq 0$. La fonction f , est développable en série entière au voisinage de $x_0 = 0$ contrairement à la fonction y . On détermine s grâce à une équation (appelée indicielle) que nous construisons maintenant.

$$\begin{cases} y &= x^{s-2} x^2 f \\ y' &= x^{s-2} (s x f + x^2 f') \\ y'' &= x^{s-2} (s(s-1) f + 2s x f' + x^2 f'') \end{cases} \quad (4.13)$$

Que l'on réinjecte dans l'équation (4.12)

$$x^{s-2} ((s^2 - \nu^2) f + (2s + 1) x f' + x^2 (f'' + f)) = 0 \quad (4.14)$$

Cette équation est vraie $\forall x$ donc on obtient l'équation indicielle

$$(s^2 - \nu^2) f + (2s + 1) x f' + x^2 (f'' + f) = 0$$

Pour obtenir l'équation indicielle et assurer la continuité de la solution en $x_0 = 0$, on pose $x = 0$ dans l'équation indicielle, pour obtenir directement

$$s^2 - \nu^2 = 0$$

Car nous avons imposé $f(0) \neq 0$. L'indice s est donc donné par $s = \pm \nu$. On peut donc réécrire l'équation indicielle pour obtenir l'équation de Bessel réduite

$$x f''(\pm 2\nu) f' + x f = 0 \quad (4.15)$$

Dans un premier temps on choisit $s = +\nu \geq 0$, on a

$$x f''(\pm 2\nu) f' + x f = 0 \quad (4.16)$$

Cette équation différentielle peut donc être résolue directement en développant f en $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$. On a

$$\begin{cases} f &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \\ f' &= \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} \\ f'' &= \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i x^{i-2} \end{cases} \quad (4.17)$$

En remplaçant dans l'équation indicelle on obtient

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i x^{i-2} + (2\nu+1) \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0 \quad (4.18)$$

On modifie le deuxième terme :

$$(2\nu+1) \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = (2\nu+1) a_1 + (2\nu+1) \sum_{i=2}^{\infty} i a_i x^{i-1} \quad (4.19)$$

Dans la première et la deuxième somme on fait $i = j+2$ pour obtenir

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} x^{j+1} + (2\nu+1) a_1 + \sum_{j=0}^{\infty} (2\nu+1)(j+2) a_{j+2} x^{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+1} = 0 \quad (4.20)$$

Donc

$$(2\nu+1) a_1 + \sum_{j=0}^{\infty} ((j+2)(j+2+2\nu) a_{j+2} + a_j) x^{j+1} = 0 \quad (4.21)$$

Cette relation est vraie $\forall x$, une possibilité pour la résoudre est d'annuler les deux termes indépendamment, soit

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ (j+2)(j+2+2\nu) a_{j+2} + a_j &= 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Notons que c'est un choix particulier qui nous restreint à une solution particulière. Mais nous verrons que connaître cette solution nous permet de déterminer une autre solution linéairement indépendante. On obtient

$$a_i = -\frac{1}{i(i+2\nu)} a_{i-2}$$

Comme $a_1 = 0$ on en déduit de ces deux relations :

$$a_{2p+1} = 0$$

On construit a_i par récurrence. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{2p} = -\frac{1}{2p(2\nu+2p)} a_{2p-2} \\ a_{2p-2} = -\frac{1}{(2p-2)(2\nu+2p-2)} a_{2p-4} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_2 = -\frac{1}{2(2\nu+2)} a_0 \end{array} \right. \quad (4.23)$$

En multipliant chaque terme par récurrence, on retrouve

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{1}{2^{2p} p! (\nu+p)(\nu+p-1)\dots(\nu+1)} a_0$$

On choisit de prendre une expression de a_0 qui simplifie notre expression. On prend

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

Avec Γ la fonction gamma d'Euler, qui satisfait la relation :

$$(x+1)\Gamma(x+1) = \Gamma(x+2)$$

Cette normalisation est arbitraire et en aucun cas restrictive pour le reste du calcul.

On obtient donc pour a_{2p}

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{1}{2^\nu 2^{2p} p! \Gamma(\nu+p+1)} \quad (4.24)$$

On reconstruit finalement la solution

$$y(x) = x^\nu f(x) \quad (4.25)$$

$$f(x) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p! \Gamma(\nu + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad (4.26)$$

$$y(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p! \Gamma(\nu + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Dans le cas où $\nu < 0$ il suffit de changer ν en $-\nu$, et le calcul est parfaitement analogue. $y(x)$ est la solution de l'équation (4.12). Par définition cette solution est l'expression de la fonction de Bessel de 1ère espèce J_ν , avec $\nu \in \mathbb{R}$, c'est à dire :

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p! \Gamma(\nu + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad (4.27)$$

On aurait tendance à vouloir construire, comme solution générale de notre équation

$$y(x) = A J_\nu(x) + B J_{-\nu}(x) \quad (4.28)$$

Cependant, on peut montrer que dans le cas où $\nu \in \mathbb{Z}$ on peut montrer $J_{-n} = J_n$, ces deux fonctions ne sont donc plus linéairement indépendantes. Cette combinaison n'est donc valable que si ν est demi-entier ou plus généralement si $\nu \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Pour trouver une autre combinaison linéairement indépendante, il faut utiliser le wronksien. Soient deux solutions y_1 et y_2 linéairement indépendantes de notre équation différentielle. On a

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Le wronksien est défini par :

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Considérons les équations liées à y_1 et y_2

$$\begin{cases} y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

En multipliant la première équation par $-y_2$ et la deuxième par y_1 , puis en additionnant les deux on

obtient

$$-y_1'' y_2 + y_2'' y_1 + p(-y_1', y_2 + y_2' y_1) = 0 \quad (4.30)$$

$$W' + p W = 0 \quad (4.31)$$

$$W = \exp\left(-\int p dx\right)$$

Et on montre facilement

$$W = y_1^2 \frac{d y_2}{dx y_1}$$

On obtient finalement

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int p dx\right) dx \quad (4.32)$$

Dans notre cas $p = 1/x$ Dans ce cas on montre que la deuxième solution est donnée par

$$y_2 = J_\nu(x) \int \frac{dx}{x J_\nu^2(x)} dx \quad (4.33)$$

L'intégrale tabulée en ([Gradshteyn et al. 2007](#)) donne :

$$y_2 = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu = \cot(\pi\nu) J_\nu(x) - \frac{1}{\sin(\pi\nu)} J_{-\nu}(x) \quad (4.34)$$

Il existe également une troisième famille de solutions : les fonctions de Hankel mais nous ne les aborderons pas ici car il s'agit simplement d'une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de 1ères et 2èmes espèce.

Il faut maintenant replacer la solution trouvée dans le cadre de notre étude. Dans un premier temps, on rappelle que la symétrie cylindrique du problème nous impose : $\partial_\theta^2 \Theta = 0$

En reprenant les équations (4.8) et (4.9) on obtient tout de suite

$$\partial_\theta^2 \Theta = \nu^2 = 0 \quad (4.35)$$

La symétrie nous impose donc $\nu = 0$. D'autre part, la divergence de la fonction y_2 en zéro nous empêcherait de pouvoir calculer le flux au centre galactique. On impose donc $B = 0$. La solution

cherchée est donc de la forme

$$y(x) = J_0(x)$$

En réutilisant $x = r\beta$, on obtient :

$$R(r) = J_0(r\beta)$$

La condition aux limites radiales nous impose $R(R_g) = 0$, (avec R_g le rayon de la galaxie) donc :

$$J_0(R_g\beta) = 0$$

On définit les solutions de cette équation β_i tels que

$$\zeta_i = \beta_i R_g$$

où ζ_i sont les zéros de la fonction de Bessel. Et donc

$$\beta_i = \frac{\zeta_i}{R_g}$$

pour finir

$$R(r) = a_i J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R_g}\right)$$

On étudie la base des vecteurs ainsi construite. On pose $|n\rangle = J_0(r \zeta_n/R_g)$. Dans un premier temps, on vérifie que cette base est orthogonale, puis nous calculerons sa normalisation. On définit le produit scalaire $\langle m|n\rangle$ comme étant

$$\langle m|n\rangle = \int_0^R J_0^*\left(r \frac{\zeta_m}{R_g}\right) J_0\left(r \frac{\zeta_n}{R_g}\right) r dr \quad (4.36)$$

On peut montrer que

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad (4.37)$$

Et également que

$$J_\nu(x) = J_{-\nu}(x)$$

qui nous servira dans la suite des calculs. On pose $\rho = r/R_g$

$$\langle m|n \rangle = R_g^2 \int_0^1 J_0^*(\rho \zeta_m) J_0(\rho \zeta_n) \rho d\rho \quad (4.38)$$

On peut montrer en utilisant (4.37) que

$$\langle m|n \rangle = \frac{1}{2} R_g^2 [J_1(\zeta_n)]^2 \delta_{m,n} \equiv C_n \quad (4.39)$$

Les fonctions de la base sont donc orthonormées. On définit la fonction $f(r) = \langle r|f \rangle$. On veut développer cette fonction sur la base que nous avons créée. On a

$$|f \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i |i \rangle \quad (4.40)$$

$$\langle m|f \rangle = \int_0^{R_g} r f(r) J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R_g}\right) r dr \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \langle m|f \rangle &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \langle m|i \rangle \\ \langle m|f \rangle = C_m &= a_m \frac{1}{2} R_g^2 [J_1(\zeta_m)]^2 \delta_{m,i} \end{aligned}$$

Donc

$$a_i = \frac{2}{R_g^2 [J_1(\zeta_i)]^2} \int_0^{R_g} f(r) J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R_g}\right) r dr \quad (4.42)$$

On doit maintenant recombinaison la solution totale de notre équation différentielle :

$$\begin{aligned} N(r, z) &= R(r) Z(z) \\ N(r, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{R_g^2 [J_1(\zeta_i)]^2} \int_0^{R_g} f(r) J_0\left(r' \frac{\zeta_i}{R_g}\right) r' dr' Z(z) J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R_g}\right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

On pose pour toute la suite de cette thèse

$$\tilde{N}_i(z) = \frac{2}{R_g^2 [J_1(\zeta_i)]^2} \int_0^{R_g} N(r, z) J_0\left(r' \frac{\zeta_i}{R_g}\right) r' dr'$$

On a donc

$$N(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{N}_i(z) J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R_g}\right) \quad (4.44)$$

On a maintenant deux possibilités pour résoudre l'équation initiale. On peut soit continuer la résolution, en remplaçant $R(r)$, et en cherchant $Z(z)$, comme on fait classiquement dans les méthodes de séparation des variables. Ou alors on repart de l'équation initiale et on injecte dedans l'équation (4.44). Les deux méthodes sont en fait strictement équivalentes. Nous utiliserons la deuxième dans la suite de cette thèse. De plus, la fonction R n'étant plus utilisée, R_g sera noté R .

Nous repartons donc de l'équation initiale, en supprimant dès maintenant la dérivée en θ

$$-\partial_z \left(\frac{V_C}{D} N \right) + \partial_r^2 N + \frac{1}{r} \partial_r N + \partial_z^2 N - 2h \frac{\Gamma}{D} N \delta(z) = -q(r) f(z) \quad (4.45)$$

Dans un premier temps, nous considérons que toutes les sources sont réparties dans le disque galactique infiniment mince, on choisit donc $f(z) = \delta(z)$. On résout cette équation sur $z \in]0, L]$. Sur cette intervalle, on a $V_c(z) = +V_c$. On cherche donc une solution à :

$$-\frac{V_C}{D} \partial_z N + \partial_r^2 N + \frac{1}{r} \partial_r N + \partial_z^2 N = 0 \quad (4.46)$$

On utilise l'équation (4.44)

$$-\sum_{i=0}^{\infty} \frac{V_C}{D} d_z \tilde{N}_i J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R}\right) + \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{N}_i d_r^2 J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R}\right) + \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{N}_i d_r J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R}\right) + \sum_{i=0}^{\infty} d_z^2 \tilde{N}_i J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R}\right) = 0 \quad (4.47)$$

Or, on peut montrer, grâce à la relation 4.37 (Weisstein 2013) que

$$J_0'' + \frac{1}{x} J_0' = -J_0(x) \quad (4.48)$$

On se sert de cette relation pour combiner les différentes dérivées sur J_0 et finalement obtenir

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{V_C}{D} d_z \tilde{N}_i + d_z^2 \tilde{N}_i - \frac{\zeta_i^2}{R^2} \tilde{N}_i \right) J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R}\right) = 0 \quad (4.49)$$

Cette relation doit être valable $\forall z$ donc, on obtient une équation pour chaque indice i :

$$-\frac{V_C}{D} d_z \tilde{N}_i + d_z^2 \tilde{N}_i - \frac{\zeta_i^2}{R^2} \tilde{N}_i = 0 \quad (4.50)$$

Le discriminant de l'équation caractéristique de cette équation différentielle est donné par :

$$\Delta = \left(\frac{V_C}{D}\right)^2 + 4 \frac{\zeta_i^2}{R^2}$$

On voit immédiatement qu'il est défini positif. Les solutions sont donc données par

$$\tilde{N}_i(z) = \exp\left(\frac{V_C z}{2D}\right) (A_i \sinh(S_i z) + B_i \cosh(S_i z)) \quad (4.51)$$

$$S_i^2 = \left(\frac{V_C}{D}\right)^2 + 4 \frac{\zeta_i^2}{R^2} \quad (4.52)$$

On utilise maintenant la condition $N(r, z = L) = 0 \equiv \tilde{N}_i(L) = 0$, pour montrer que

$$\tilde{N}_i(z) = \exp\left(\frac{V_C z}{2D}\right) P_i \sinh\left(S_i \frac{L - z}{2}\right) \quad (4.53)$$

On impose à la solution d'être continue, de plus la condition $N(r, z = L) = N(r, z = -L) = 0$ impose à la solution d'être symétrique. On obtient donc

$$\tilde{N}_i(z) = \exp\left(\frac{V_C |z|}{2D}\right) P_i \sinh\left(S_i \frac{L - |z|}{2}\right) \quad (4.54)$$

De plus la symétrie de la solution impose la parité de ses dérivées

$$\begin{cases} \tilde{N}_i(z) &= \tilde{N}_i(-z) \\ \tilde{N}_i'(z) &= -\tilde{N}_i'(-z) \\ \tilde{N}_i''(z) &= \tilde{N}_i''(-z) \end{cases} \quad (4.55)$$

On se sert de ces propriétés pour intégrer l'équation différentielle le long de z sur une tranche d'épaisseur infinitésimale d'épaisseur 2ϵ . Nous pouvons ainsi déterminer la constante P_i

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(-d_z \left(\frac{V_C}{D} \tilde{N}_i \right) + d_z^2 \tilde{N}_i - \frac{\zeta_i^2}{R^2} \tilde{N}_i - 2h \frac{\Gamma}{D} \tilde{N}_i \delta(z) + \frac{\tilde{q}_i}{D} \delta(z) \right) dz = 0 \quad (4.56)$$

$q(r)$ ne dépendant que de r , il peut aussi se décomposer sur la base des fonctions de Bessel.

$$q(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{q}_i J_0(r \frac{\zeta_i}{R})$$

De plus on peut montrer que

$$d_z^2 \tilde{N}_i = \frac{V_c}{D} d_z \tilde{N}_i + \frac{\zeta_i^2}{R^2} N$$

On a également $V_c(-z) = -V_c$. On obtient donc :

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(-2h \frac{\Gamma}{D} \tilde{N}_i \delta(z) + \frac{\tilde{q}_i}{D} \delta(z) \right) dz = 0 \quad (4.57)$$

En intégrant et en faisant $\epsilon \rightarrow 0$ on a

$$- \frac{V_c}{D} \tilde{N}_i(0) + \left(-\frac{V_c}{D} \tilde{N}_i(0) \right) + d_z \tilde{N}_i(0) - \left(-d_z \tilde{N}_i(0) \right) - 2h \frac{\Gamma}{D} \tilde{N}_i(0) + \frac{\tilde{q}_i}{D} - \frac{\zeta_i^2}{R^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \tilde{N}_i dz = 0 \quad (4.58)$$

On peut montrer que

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \tilde{N}_i dz = 0$$

en effet

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \tilde{N}_i dz < \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \text{Max}(\tilde{N}_i) dz$$

et

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \text{Max}(\tilde{N}_i) dz = 2\epsilon \text{Max}(\tilde{N}_i) \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

Ce qui conduit à l'équation :

$$- 2 \frac{V_c}{D} \tilde{N}_i(0) + 2 \tilde{N}'_i(0) - 2h \frac{\Gamma}{D} \tilde{N}_i(0) + \frac{\tilde{q}_i}{D} = 0 \quad (4.59)$$

qui nous conduit directement à la constante P_i

$$P_i = \frac{\tilde{q}_i}{2h\Gamma + V_c + D S_i \coth(S_i L/2)} \frac{1}{\sinh(S_i L/2)} \quad (4.60)$$

Et on obtient finalement, la solution de l'équation de diffusion :

$$\begin{aligned}
 N(r, z) &= \exp(V_c |z|/2D) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tilde{q}_i}{A_i} \frac{\sinh(S_i (L - |z|)/2)}{\sinh(S_i L/2)} J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R}\right) \\
 S_i^2 &= \left(\frac{V_c}{D}\right)^2 + 4\left(\frac{\zeta_i}{R}\right)^2 \\
 A_i &= 2h\Gamma + V_c + D S_i \coth(S_i L/2) \\
 \tilde{q}_i &= \frac{2}{[J_1(\zeta_i)]^2} \int_0^1 \rho q(r) J_0(\zeta_i \rho) d\rho \\
 \zeta_i &\text{ solution de } J_0(\zeta_i) = 0
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

La résolution introduit une somme infinie et une intégrale dépendante du terme source. En fonction du terme choisi il est possible d'avoir à la calculer numériquement, c'est pourquoi de telles résolutions s'appellent semi-analytiques. Cependant le fait de ne pas avoir à résoudre l'équation différentielle numériquement fait gagner beaucoup de temps. D'autre part à l'image d'une décomposition en série de Fourier ou en harmoniques sphériques, l'indice des fonctions de Bessel nous renseigne sur une échelle spatiale. Plus l'indice est élevé plus les fonctions décrivent de petites fluctuations spatiales. Or le phénomène de diffusion est dicté en grande partie par le terme source. Des termes de la forme de (2.41) ne présentent pas de fluctuations sur de petites échelles spatiales, la somme présente dans la solution trouvée converge donc très rapidement et la partie numérique du calcul est très rapide.

On représente à titre d'exemple le profil de densité de protons obtenu pour une distribution réaliste de sources (discuté en section 2.2 (page 45)), et montré sur la figure 4.1. Il montre que la majorité du flux est bien contenu en $z = 0$ et que le flux s'annule bien aux bords du halo. D'autre part la solution obtenue fait apparaître un terme en décroissance exponentielle issu du vent convectif. Ce dernier a bien comme effet de faire disparaître le flux qu'il éjecte vers les bords verticaux du halo. D'autre part on constate la présence de termes de la forme Γ/D et V_c/D , qui quantifient en fait l'effet de la diffusion par rapport aux spallations et au vent convectif, ces termes seront discutés plus tard.

2 L'ÉQUATION DE DIFFUSION DANS LE CADRE D'UN MODÈLE DE DISQUE ÉPAIS

Pour résoudre l'équation dans le cadre d'un modèle de disque épais, on sépare l'équation en plusieurs zones correspondant au disque (zone I) et au halo en $z > 0$ (zone II). Comme prescription on choisit un vent convectif uniquement présent dans la zone du halo. Comme nous l'avons vu dans la résolution précédente, étant donné l'effet du vent, plus important à grand z , ce choix ne changera que très peu la physique du système et simplifiera les équations. Nous allons résoudre ce modèle à

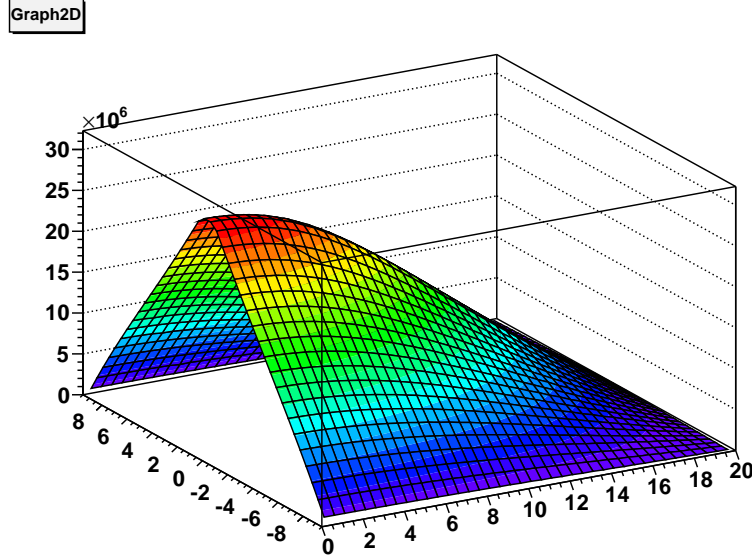


FIGURE 4.1: Profil de densité à 1 TeV avec une normalisation arbitraire en kpc^{-3} . L'axe x représente l'épaisseur du disque (entre -8 kpc et 8 kpc), l'axe y le rayon de la galaxie (de 0 kpc à 20 kpc) et l'axe z le flux en normalisation arbitraire. La majorité des rayons cosmiques est située proche du centre galactique et dans le disque de matière galactique ($L = 0$).

l'aide d'un continuum de sources dans un premier temps puis nous considérerons le cas de sources ponctuelles.

2.1 Résolution avec une distribution continue de sources

Pour cette résolution, on se permet dans un premier temps de positionner les sources uniquement à l'intérieur du disque de matière avec une distribution uniforme. On a donc le système d'équations

$$\begin{aligned} \text{ZONE I :} \quad & \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2h\Gamma}{D} \right] N_I(r, z) = -\frac{q}{D} \\ \text{ZONE II :} \quad & \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{V_c}{D} \frac{\partial}{\partial z} \right] N_{II}(r, z) = 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Ici, comme nous l'avons montré dans la section précédente, on peut directement décomposer la fonction N en fonctions de Bessel

$$N(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{N}_i(z) J_0(\zeta_i \frac{r}{R}) \quad \text{et} \quad q(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{q}_i(z) J_0(\zeta_i \frac{r}{R}) \quad (4.63)$$

où les ζ_i sont les zéros de la fonction de Bessel. Les fonctions de Bessel sont fonctions propres de la partie radiale de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques. En effet, en utilisant

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) J_0 \left(\zeta_i \frac{r}{R} \right) = -\frac{\zeta_i^2}{R^2} J_0 \left(\zeta_i \frac{r}{R} \right)$$

et en injectant (4.63) dans (4.62), on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned} \text{ZONE I :} \quad & \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{d^2}{dz^2} - \underbrace{\left(\frac{\zeta_i^2}{R^2} + \frac{2h\Gamma}{D} \right)}_{\alpha_i^2} \right] \tilde{N}_{iI}(z) J_0 \left(\zeta_i \frac{r}{R} \right) = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tilde{q}_i}{D} J_0 \left(\zeta_i \frac{r}{R} \right) \\ \text{ZONE II :} \quad & \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{V_c}{D} \frac{d}{dz} - \frac{\zeta_i^2}{R^2} \right] \tilde{N}_{iII}(z) J_0 \left(\zeta_i \frac{r}{R} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

En multipliant ces équations par $J_0(\zeta_j r/R)$ et par r/R et en utilisant la relation d'orthogonalité des fonctions de Bessel on obtient

$$\int_0^1 \rho J_0(\zeta_i \rho) J_0(\zeta_j \rho) d\rho = \frac{1}{2} J_1^2(\zeta_j) \delta_{ij} \quad (4.65)$$

On obtient finalement le système d'équations portant sur la seule variable z :

$$\begin{aligned} \text{ZONE I :} \quad & \left[\frac{d^2}{dz^2} - \alpha_i^2 \right] \tilde{N}_{iI}(z) = -\frac{\tilde{q}_i}{D} \\ \text{ZONE II :} \quad & \left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{V_c}{D} \frac{d}{dz} - \frac{\zeta_i^2}{R^2} \right] \tilde{N}_{iII}(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

qui est le système à résoudre. De plus il faut introduire des conditions aux limites à l'interface des deux zones. La première condition, qui semble évidente, est d'assurer la continuité du profil de densité de rayons cosmiques. D'autre part la deuxième quantité qui doit être conservée est le courant total injecté dans l'équation de continuité le long de l'axe z . On doit aussi avoir $N(r, z = L) = 0$ et on demande également la symétrie de la solution vis-à-vis de l'axe z , on trouve donc, en utilisant (4.63) :

$$\tilde{N}_{iII}(L) = 0 \quad (4.67)$$

$$\tilde{N}_{iI}(z) = \tilde{N}_{iI}(-z) \quad (4.68)$$

$$\tilde{N}_{iI}(h) = \tilde{N}_{iII}(h) \quad (4.69)$$

$$\frac{d\tilde{N}_{iI}}{dz} \Big|_{z=h} = \frac{d\tilde{N}_{iII}}{dz} \Big|_{z=h} - \frac{V_c}{K} \tilde{N}_{iII}(h)$$

Résolution pour un disque épais

Dans la région (II), la solution est la même que dans le cas du disque infiniment mince, la solution de la zone (I) est une combinaison de la solution homogène et de la solution particulière, on trouve donc

$$\begin{cases} \tilde{N}_{iI}(z) = C_i \sinh \alpha_i z + K_i \cosh \alpha_i z + \frac{\tilde{q}_i}{D\alpha_i^2} \\ \tilde{N}_{iII}(z) = A_i \exp \left[\frac{1}{2} \left(V_c z + \sqrt{\left(\frac{V_c}{D}\right)^2 - 4 \frac{\zeta_i^2}{R^2}} \right) \right] + B_i \exp \left[\frac{1}{2} \left(V_c z - \sqrt{\left(\frac{V_c}{D}\right)^2 - 4 \frac{\zeta_i^2}{R^2}} \right) \right] \end{cases} \quad (4.70)$$

En utilisant la première condition aux limites on obtient le même résultat que dans le cas du disque mince :

$$\tilde{N}_i(z) = \exp \left(\frac{V_c z}{2D} \right) P_i \sinh \left(S_i \frac{L-z}{2} \right)$$

En utilisant la symétrie par rapport au plan galactique on impose la parité du flux dans la zone (I) donc $C_i = 0$. Enfin les deux dernières conditions entraînent :

$$K_i \cosh(\alpha_i h) + \frac{\tilde{q}_i}{D\alpha_i^2} = e^{(V_c z/2D)} P_i \sinh \left(S_i \frac{L-z}{2} \right) \quad (4.71)$$

$$\alpha_i K_i \sinh \alpha_i h = -\frac{V_c z}{2D} e^{(V_c z/2D)} P_i \sinh \left(S_i \frac{L-h}{2} \right) - \frac{S_i}{2} e^{(V_c h/2D)} P_i \cosh \left(S_i \frac{L-h}{2} \right) \quad (4.72)$$

En divisant la première équation par la deuxième on obtient

$$\begin{cases} K_i \cosh(\alpha_i h) = \frac{\tilde{q}_i}{D\alpha_i^2} \frac{\beta}{\alpha_i \tanh(\alpha_i h) - \beta} \\ \text{avec } \beta = \frac{V_c z}{2D} + \frac{S_i}{2} \coth \left(S_i \frac{L-h}{2} \right) \end{cases} \quad (4.73)$$

Il vient tout de suite :

$$P_i = \frac{\tilde{q}_i}{D\alpha_i^2} \frac{\alpha_i \tanh(\alpha_i h)}{\beta}$$

La résolution conduit à :

$$\begin{cases} \tilde{N}_{II}(z) = K_i \cosh(\alpha_i z) + \frac{\tilde{q}_i}{D\alpha_i^2} \\ \tilde{N}_{III}(z) = \exp(V_c z/2D) P_i \sinh\left(S_i \frac{L-z}{2}\right) \end{cases} \quad (4.74)$$

$$\begin{cases} K_i \cosh(\alpha_i h) = \frac{\tilde{q}_i}{D\alpha_i^2} \frac{\beta}{\alpha_i \tanh(\alpha_i h) - \beta} \\ P_i = \frac{\tilde{q}_i}{K\alpha_i^2} \frac{\alpha_i \tanh(\alpha_i h)}{\beta} \\ \beta = \frac{V_c z}{2D} + \frac{S_i}{2} \coth\left(S_i \frac{L-h}{2}\right) \end{cases} \quad (4.75)$$

Les résultats sont donnés sur la figure 4.2 pour des énergies de 10 GeV et de 10^6 GeV. Le calcul est fait en $z = 0$, au niveau du Système solaire donc. Il apparaît que la différence maximale entre les deux résultats n'est que de l'ordre du pourcent dans le pire des cas. Pour calculer un flux, on peut donc négliger l'épaisseur du disque. En fait le réel intérêt de ce calcul se trouve dans la résolution pour des sources ponctuelles. En effet, jusqu'à maintenant la plupart des travaux considéraient des distributions de sources le long de l'axe z comme suivant un disque infiniment mince, donc de la forme $\delta(z)$. En prenant un disque épais on augmente la dispersion de sources le long de l'axe z . Nous allons voir les effets sur le flux, mais le principal intérêt est dans le traitement de l'anisotropie.

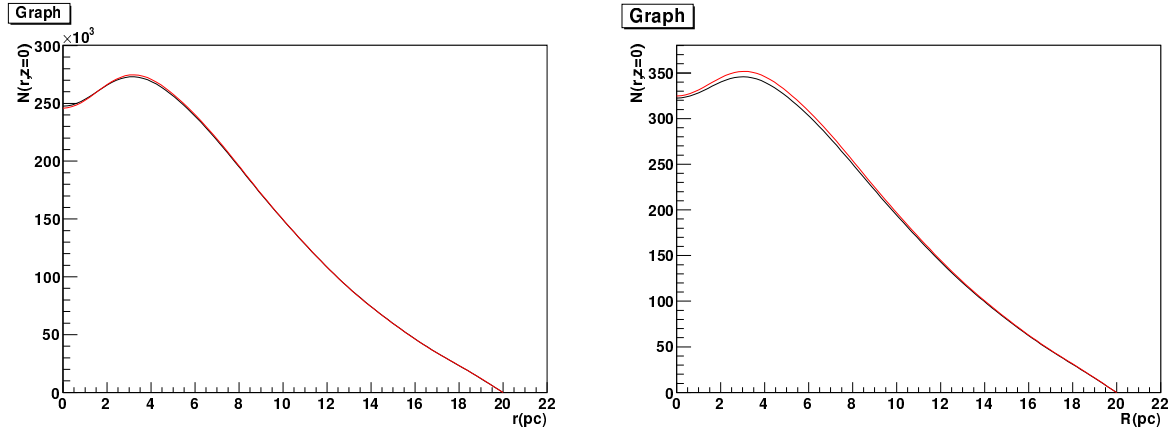


FIGURE 4.2: Profil de densité à 10 GeV (à gauche) et 10^6 GeV (à droite), dans le cadre d'un modèle de disque mince (en rouge) et de disque épais (en noir), avec une normalisation arbitraire en kpc^{-3}

2.2 Résolution pour une source ponctuelle

On peut également résoudre l'équation pour une source ponctuelle. Cette fois-ci la résolution est un peu différente car a priori la source étant positionnée arbitrairement dans la galaxie, le système perd la symétrie cylindrique. Pour la conserver, on peut considérer le plan galactique comme un plan infini, dans ce cas $R \rightarrow \infty$ et chaque source de coordonnée r_s est le centre d'un cylindre de rayon $R \rightarrow \infty$. Dans ce cas, on oublie les bords radiaux. Étant donnée la distance entre le Système solaire et le bord radial le plus proche, soit 11.5 kpc nous ne sommes pas sensibles à ces bords (cette affirmation sera vérifiée a posteriori), de plus cette méthode a été utilisée dans (Donato et al. 2001) avec succès. Dans ce cas la résolution est différente et on doit résoudre pour chaque source. On résout donc pour une seule source ponctuelle située en $r_s = 0$ et on fait tendre R vers l'infini. La source peut ne pas être située dans le disque, auquel cas la symétrie en z est alors elle aussi brisée. On place cette source $z = z_s$. Il n'y a donc plus de symétrie par rapport au plan galactique. Notons que ce genre de problème est également traité en électrostatique et résolu par la méthode des images électriques (voir par exemple (Durand 1966)). Ici nous nous concentrons sur une autre résolution.

Comme on ne cherche plus à annuler la densité en $r = R$, nous avons $R \rightarrow \infty$, nous pouvons donc considérer une décomposition en fonctions de Bessel sur une base continue, c'est-à-dire en fait $\zeta_i/R \rightarrow k$. Ce qui conduit à

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) J_0(kr) = -k^2 J_0 \left(\zeta_i \frac{r}{R} \right)$$

$$N(r, z) = \int_0^\infty \tilde{N}(z, k) k J_0(kr) dk \quad \text{et} \quad \tilde{N}(z, k) = \int_0^\infty N(r, z) r J_0(kr) dr \quad (4.76)$$

Les conditions aux limites sont maintenant :

- La continuité du flux en $z = \pm h$
- La continuité du courant en $z = \pm h$
- $N(r, z = L) = 0$

En fait, malgré la symétrie brisée le long de l'axe z , il existe quand même un lien direct entre les deux zones

$$N_{III}(r, z, z_s) = N_{II}(r, -z, -z_s) \quad (4.77)$$

La décomposition en fonctions de Bessel se faisant sur une base continue, nous remplaçons la somme sur les fonctions de Bessel par une intégrale.

$$q(r, z) = \int_0^\infty \tilde{q}(z, k) k J_0(kr) dk \quad \text{et} \quad \tilde{q}(z, k) = \int_0^\infty q(r, z) r J_0(kr) dr \quad (4.78)$$

Nous traitons des sources ponctuelles, donc en coordonnées cylindriques : $q(r, z) = q_d \delta(z - z_s) \delta(\pi r^2)$

$$\tilde{q}(z, k) = \int_0^\infty q(r, z) r J_0(kr) dr = \frac{q_d}{2\pi} \delta(z - z_s) \quad (4.79)$$

Pour trouver l'équation de départ on insère (4.76) et (4.78) dans (4.62) et changeant le terme source

$$\begin{cases} \text{zone I : } \int_0^\infty \left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{2h\Gamma}{D} \right) \tilde{N}_I(k, z) k J_0(kr) - \int_0^\infty k^3 \tilde{N}_I(k, z) J_0(kr) = - \int_0^\infty \frac{\tilde{q}_d(k, z)}{D} k J_0(kr) dk \\ \text{zone II : } \int_0^\infty \left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{V_c}{D} \frac{d}{dz} \right) \tilde{N}_{II}(k, z) k J_0(kr) dk - \int_0^\infty k^3 \tilde{N}_{II}(k, z) J_0(kr) dk = 0 \end{cases} \quad (4.80)$$

On utilise ensuite la propriété :

$$\int_0^\infty r J_0(k_1 r) J_0(k_2 r) dr = \delta(k_1^2 - k_2^2)$$

et on multiplie (4.80) par $J_0(k' r)$ et on intègre sur r . En utilisant

$$\delta(k_1^2 - k_2^2) = \frac{2}{k_1} \delta(k_1 - k_2)$$

On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} \text{zone I : } \left(\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{2h\Gamma}{D} + k^2 \right) \right) \tilde{N}_I(k, z) = - \frac{q_d}{2\pi D} \delta(z - z_s) \\ \text{zone II : } \left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{V_c}{D} \frac{d}{dz} - k^2 \right) \tilde{N}_{II}(k, z) = 0 \end{cases} \quad (4.81)$$

La résolution est détaillée dans l'encadré suivant.

Résolution pour une source ponctuelle stationnaire

Dans la zone I on fait la somme de la solution générale sans second membre et de la solution particulière de l'équation complète. La solution générale ne considère pas le terme source, elle est donc la même que dans le cas du disque épais. Pour la solution particulière on utilise la méthode des fonctions de Green. On pose :

$$\tilde{N}_I(z) = \int_{-h}^h G(z - z') \frac{-q_d \delta(z' - z_s)}{2\pi D} dz'$$

L'équation à laquelle obéit la fonction de Green est la suivante :

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right] G(z - z') = \delta(z - z') \quad (4.82)$$

Par transformée de Fourier on obtient :

$$G(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k) e^{-ik(z-z')} dk \quad \text{et} \quad \delta(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(z-z')} dk \quad (4.83)$$

En injectant (4.83) dans (4.82) on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-k^2 - \alpha^2) e^{-ik(z-z')} \tilde{G}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(z-z')} dk \quad (4.84)$$

donc

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{k^2 + \alpha^2} \quad (4.85)$$

On peut maintenant retrouver $G(z - z')$ par transformée de Fourier :

$$G(z - z') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \alpha^2} e^{-ik(z-z')} dk = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|z-z'|} \quad (4.86)$$

Donc la solution particulière est donnée par :

$$\tilde{N}_I(z) = \int_{-h}^h \frac{-1}{2\alpha} e^{-\alpha|z-z'|} \frac{-q_d \delta(z' - z_s)}{2\pi D} dz' = \frac{q_d}{4\pi\alpha K} e^{-\alpha|z-z_s|} \quad (4.87)$$

La solution finale est donc en utilisant (4.77):

$$\begin{cases} N_I(z, z_s) = A(z_s) \cosh(\alpha z) + B(z_s) \sinh(\alpha z) + \frac{q_d}{4\pi\alpha D} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ \tilde{N}_{II}(z, z_s) = C(z_s) e^{\frac{V_{cz}}{2D}} e^{\frac{S_{jz}}{2}} + K(z_s) e^{\frac{V_{cz}}{2D}} e^{-\frac{S_{jz}}{2}} \\ \tilde{N}_{III}(z, z_s) = C(-z_s) e^{-\frac{V_{cz}}{2D}} e^{-\frac{S_{jz}}{2}} + K(-z_s) e^{-\frac{V_{cz}}{2D}} e^{\frac{S_{jz}}{2}} \end{cases} \quad (4.88)$$

Les conditions aux limites que nous allons considérer sont les suivantes :

- Le flux s'annule en $z = L$: $\tilde{N}_{II}(L, z_s) = 0$, $\tilde{N}_{III}(-L, z_s) = 0$
- Le flux est continu en $+h$: $\tilde{N}_I(h, z_s) = \tilde{N}_{II}(h, z_s)$
- Le flux est continu en $-h$: $\tilde{N}_I(-h, z_s) = \tilde{N}_{III}(-h, z_s)$

- Le courant est continu en $+h$: $\frac{d\tilde{N}_I(z, z_s)}{dz}|_{z=h} = \frac{d\tilde{N}_{II}(z, z_s)}{dz}|_{z=h} - \frac{V_c}{D}\tilde{N}_{II}(h, z_s)$
- Le courant est continu en $-h$: $\frac{d\tilde{N}_I(z, z_s)}{dz}|_{z=h} = \frac{d\tilde{N}_{III}(z, z_s)}{dz}|_{z=h} + \frac{V_c}{D}\tilde{N}_{III}(h, z_s)$

La condition $\tilde{N}_{II}(L, z_s) = 0$ impose :

$$C(z_s)e^{\frac{V_c L}{2D}}e^{\frac{S_i L}{2}} = -K(z_s)e^{\frac{V_c L}{2D}}e^{-\frac{S_i L}{2}}$$

$$C(z_s) = -K(z_s)e^{-2\frac{S_i L}{2}}$$

$$\tilde{N}_{II}(z, z_s) = e^{V_c z/2D}e^{-S_i L/2}C(z_s) \sinh\left(S_i \frac{L-z}{2}\right)$$

$$\tilde{N}_{III}(z, z_s) = e^{-V_c z/2D}e^{-S_i L/2}K(z_s) \sinh\left(-S_i \frac{L+z}{2}\right)$$

La continuité du flux en $+h$ et $-h$ impose :

$$\begin{cases} A(z_s) \cosh(\alpha h) + B(z_s) \sinh(\alpha h) + \frac{q_d}{4\pi\alpha D}e^{-\alpha(h-z_s)} = C(z_s)e^{V_c h/2D}e^{-S_i L/2} \sinh\left(S_i \frac{L-h}{2}\right) \\ A(z_s) \cosh(\alpha h) - B(z_s) \sinh(\alpha h) + \frac{q_d}{4\pi\alpha D}e^{-\alpha(h+z_s)} = K(z_s)e^{V_c h/2D}e^{-S_i L/2} \sinh\left(S_i \frac{L-h}{2}\right) \end{cases} \quad (4.89)$$

qui conduit à

$$\begin{cases} A(z_s) \cosh(\alpha h) + \frac{q_d}{4\pi\alpha D}e^{-\alpha h} \cosh(\alpha z_s) = E_+(z_s)e^{V_c h/2D-S_i L/2} \sinh\left(S_i \frac{L-h}{2}\right) \\ B(z_s) \sinh(\alpha h) + \frac{q_d}{4\pi\alpha D}e^{-\alpha h} \sinh(\alpha z_s) = E_-(z_s)e^{V_c h/2D-S_i L/2} \sinh\left(S_i \frac{L-h}{2}\right) \end{cases} \quad (4.90)$$

On a posé : $E_+(z_s) = \frac{C(z_s)+K(z_s)}{2}$ et $E_-(z_s) = \frac{C(z_s)-K(z_s)}{2}$ La continuité de courant en h et $-h$ impose :

$$\begin{aligned} \alpha A(z_s) \sinh(\alpha h) + \alpha B(z_s) \cosh(\alpha h) - \frac{q_d}{4\pi D}e^{-\alpha(h-z_s)} = \\ - C(z_s)e^{V_c h/2D-S_i L/2} \sinh\left(S_i \frac{L-h}{2}\right) \quad ([1]) \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} -\alpha A(z_s) \sinh(\alpha h) + \alpha B(z_s) \cosh(\alpha h) + \frac{q_d}{4\pi D}e^{-\alpha(h+z_s)} = \\ K(z_s)e^{V_c h/2D-S_i L/2} \sinh\left(S_i \frac{L-h}{2}\right) \quad ([1]) \end{aligned} \quad (4.92)$$

Où on a posé : $[1] = \frac{V_c}{2D} + \frac{S_i}{2} \coth\left(S_i \frac{L-h}{2}\right)$. En ajoutant/Soustrayant on trouve :

$$\begin{cases} A(z_s) \sinh(\alpha h) = \frac{q_d}{4\pi\alpha D} e^{-\alpha h} \cosh(\alpha z_s) - E_+(z_s) e^{\frac{V_c}{2D}h - \frac{S_i L}{2}} \sinh\left(S_i \frac{L-h}{2}\right) \frac{[1]}{2} \\ B(z_s) \cosh(\alpha h) = \frac{q_d}{4\pi\alpha D} e^{-\alpha h} \sinh(\alpha z_s) - E_-(z_s) e^{\frac{V_c}{2D}h - \frac{S_i L}{2}} \sinh\left(S_i \frac{L-h}{2}\right) \frac{[1]}{\alpha} \end{cases} \quad (4.93)$$

En utilisant (4.93) et (4.90) on obtient :

$$\begin{cases} A(z_s) = \frac{q_d}{4\pi D\alpha} e^{-\alpha h} \frac{\cosh(\alpha z_s)}{\cosh(\alpha h)} \frac{1 - \frac{[1]}{\alpha}}{\tanh(\alpha h) + \frac{[1]}{\alpha}} \\ B(z_s) = \frac{q_d}{4\pi D\alpha} e^{-\alpha h} \frac{\sinh(\alpha z_s)}{\sinh(\alpha h)} \frac{1 - \frac{[1]}{\alpha}}{\coth(\alpha h) + \frac{[1]}{\alpha}} \end{cases} \quad (4.94)$$

de même :

$$\begin{cases} E_+(z_s) = \frac{q_d}{4\pi D\alpha} e^{-\alpha h} \frac{e^{-\frac{V_c}{2D}h + \frac{S_i L}{2}}}{\sinh\left(S_i \frac{L-h}{2}\right)} \cosh(\alpha z_s) \frac{\tanh(\alpha h) + 1}{\tanh(\alpha h) + \frac{[1]}{\alpha}} \\ E_-(z_s) = \frac{q_d}{4\pi D\alpha} e^{-\alpha h} \frac{e^{-\frac{V_c}{2D}h + \frac{S_i L}{2}}}{\sinh\left(S_i \frac{L-h}{2}\right)} \sinh(\alpha z_s) \frac{\coth(\alpha h) + 1}{\coth(\alpha h) + \frac{[1]}{\alpha}} \end{cases} \quad (4.95)$$

La solution de l'équation est finalement donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{N}_I(z, z_s, k) = & \frac{q_d}{4\pi D\alpha} e^{-\alpha h} \frac{\cosh(\alpha z_s)}{\cosh(\alpha h)} \frac{1 - \frac{[1]}{\alpha}}{\tanh(\alpha h) + \frac{[1]}{\alpha}} \cosh(\alpha z) \\ & + \frac{q_d}{4\pi D\alpha} e^{-\alpha h} \frac{\sinh(\alpha z_s)}{\sinh(\alpha h)} \frac{1 - \frac{[1]}{\alpha}}{\coth(\alpha h) + \frac{[1]}{\alpha}} \sinh(\alpha z) + \frac{q_d}{4\pi\alpha D} e^{-\alpha|z-z_s|} \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{II}(z, z_s, k) = & e^{V_c(z-h)/2D} \left[\frac{q_d}{4\pi D\alpha} e^{-\alpha h} \cosh(\alpha z_s) \frac{\tanh(\alpha h) + 1}{\tanh(\alpha h) + \frac{[1]}{\alpha}} \right. \\ & \left. + \frac{q_d}{4\pi D\alpha} e^{-\alpha h} \sinh(\alpha z_s) \frac{\coth(\alpha h) + 1}{\coth(\alpha h) + \frac{[1]}{\alpha}} \right] \frac{\sinh\left(S_i \frac{L-z}{2}\right)}{\sinh\left(S_i \frac{L-h}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Avec

$$\begin{cases} [1] = \frac{V_c}{2D} + \frac{S}{2} \coth\left(S \frac{L-h}{2}\right) \\ S = S(k) = \sqrt{\frac{V_c^2}{2D} + k^2} \\ \alpha = \alpha(k) = \sqrt{\frac{2h\Gamma}{D} + k^2} \end{cases} \quad (4.98)$$

Pour obtenir la densité de rayons cosmiques il faut intégrer numériquement ce résultat convolué avec les fonctions de Bessel (comme nous l'avons vu avec l'équation (4.76)). Cette intégration peut être longue car à cause de la source en $\delta(\pi r^2)\delta(z - z_s)$ la convergence de l'intégrale est très lente. De plus à cause des fonctions de Bessel elle oscille beaucoup. On explique ce phénomène assez facilement, le terme source étant ponctuel, pour le modéliser correctement il faut atteindre des ordres très élevés de fonctions de Bessel, qui représentent les petites échelles spatiales. Cependant on a, dans la zone (I) (le disque)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{q_d}{4\pi D \alpha} e^{-\alpha h} \frac{\cosh(\alpha z_s)}{\cosh(\alpha h)} \frac{1 - \frac{[1]}{\alpha}}{\tanh(\alpha h) + \frac{[1]}{\alpha}} \cosh(\alpha z) k J_0(kr) &\rightarrow 0 \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{q_d}{4\pi D \alpha} e^{-\alpha h} \frac{\sinh(\alpha z_s)}{\sinh(\alpha h)} \frac{1 - \frac{[1]}{\alpha}}{\coth(\alpha h) + \frac{[1]}{\alpha}} \sinh(\alpha z) k J_0(kr) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.99)$$

Cette partie converge, son intégrale peut donc être bien approximée en intégrant jusqu'à une coupure Λ . Pour la partie consacrée à la source, c'est à dire : $\frac{q_d}{4\pi \alpha K} e^{-\alpha|z-z_s|}$ on a, d'après (Shalchi 2009)

$$\int_0^\infty \frac{q_d}{4\pi \sqrt{\frac{2h\Gamma}{K} + k^2} K} e^{-\sqrt{\frac{2h\Gamma}{K} + k^2}|z-z_s|} k J_0(kr) dk = \frac{q_d}{4\pi K} \frac{e^{-\frac{2h\Gamma}{K} \sqrt{r^2 + (z-z_s)^2}}}{\sqrt{r^2 + (z-z_s)^2}} \quad (4.100)$$

Ce résultat correspond au propagateur d'une particule située dans une sphère de matière sans bord obéissant à l'équation :

$$K\Delta N - 2h\Gamma N = \delta^3(\vec{r}) \quad \text{en coordonnées sphériques} \quad (4.101)$$

Ce qui veut dire que la partie de la solution faisant apparaître l'intégration des termes de l'équation (4.99) correspond à l'effet des bords verticaux et du vent convectif. En première approximation et pour obtenir des ordres de grandeurs on peut s'autoriser à les négliger. La solution étant donnée par (4.100) elle est très commode à calculer.

Pour l'intégration dans la zone (II), on ne distingue pas de partie consacrée uniquement à la source (du fait que cette dernière ne se situe pas dans cette zone). Pour augmenter la vitesse de convergence du calcul on commence par chercher la limite de \tilde{N} lorsque k tend vers l'infini (noté \tilde{N}_∞). Il se trouve

que cette limite est justement une fonction intégrable analytiquement. Ensuite par construction on obtient

$$\int_0^\infty \tilde{N} k J_0(kr) dk = \int_0^\Lambda (\tilde{N} - \tilde{N}_\infty) k J_0(kr) dk + N_\infty$$

avec $N_\infty = \int_0^\infty \tilde{N}_\infty k J_0(kr) dk$. L'intégrale obtenue converge assez rapidement, elle est donc viable pour le calcul numérique.

Les problèmes numériques étant résolus, la dernière étape consiste à sommer la densité de rayons cosmiques de chaque source. Pour cela on génère les sources par tirage Monte-Carlo en suivant une distribution donnée de sources, par exemple (2.42). Cette partie peut être relativement longue en fonction du nombre de sources désirées.

La solution est illustrée en $z = 0$ au voisinage de la Terre sur la figure 4.3. Elle illustre surtout l'importance du gradient du flux au voisinage des sources, ce qui sera d'une importance capitale pour les études d'anisotropie.

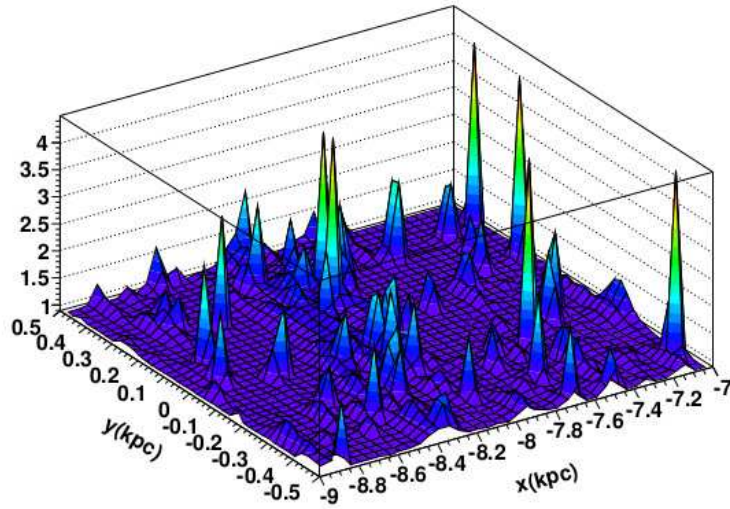


FIGURE 4.3: Profil de densité locale (normalisation arbitraire en kpc^{-3}). Le système solaire se situe en $y = 0 \text{ kpc}$, $x = -8 \text{ kpc}$. Chaque source est située à la position d'un pic sur la figure

Dans ce modèle on a traité une source ponctuelle, mais gardons à l'esprit que le modèle est toujours stationnaire, les sources émettent donc de manière continue dans la galaxie. Dans la section suivante on va s'intéresser à des sources qui émettent ponctuellement.

3 L'ÉQUATION DE DIFFUSION DANS LE MODÈLE DE LA MYRIADE

La particularité du modèle de la myriade est de considérer les sources comme étant ponctuelles. Aussi, pour une source, le terme d'injection est pris comme étant :

$$q_{\text{acc}}(\mathbf{x}_S, t_S) = \sum_{n \in \mathcal{P}} q_n \delta^3(\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_n) \delta(t_S - t_n) , \quad (4.102)$$

Chaque source i , appartient à une population \mathcal{P} , contribue d'un facteur q_i , est à la position \mathbf{x}_i et est à l'âge t_i .

La résolution d'une telle équation se fait en deux temps. Tout d'abord, on opère par séparation de variables, puis par la méthode des fonctions de Green (Barton 1989; Taillet et al. 2004). La fonction de Green représente la probabilité de trouver un cosmique à la position $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$ au temps t sachant qu'il a été injecté en (x_S, y_S, z_S) au temps t_S .

Pour obtenir la densité de cosmique sur Terre, il faut convoluer la fonction de green obtenue \mathcal{G}_p avec le terme source q_{acc}

$$N(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t dt_S \int_{\text{DH}} d^3\mathbf{x}_S \mathcal{G}(\mathbf{x}, t \leftarrow \mathbf{x}_S, t_S) q_{\text{acc}}(\mathbf{x}_S, t_S) , \quad (4.103)$$

La fonction de Green \mathcal{G}_p est une solution de l'équation de diffusion pour une source ponctuelle

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \partial_z(V_C \mathcal{G}) - K \Delta \mathcal{G} + 2h\delta(z)\Gamma_p \mathcal{G} = \delta^3(\mathbf{x}) \delta(t) . \quad (4.104)$$

L'encadré suivant détaille la résolution de l'équation de diffusion par la méthode des fonctions de Green.

Résolution de l'équation de diffusion

Nous partons de l'équation de diffusion pour un temps $t > 0$

$$\partial_t \mathcal{G} = K \Delta \mathcal{G} - \partial_z(V_z \mathcal{G}) - 2h\Gamma\delta(z)\mathcal{G} \quad (4.105)$$

Avec comme condition initiale :

$$\mathcal{G}(x, y, z, t = 0) = \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z - z_s) \quad (4.106)$$

Il se trouve que, étant donnée la forme du terme source, la résolution directe de l'équation sur N , est quasiment analogue à la résolution par méthode des fonctions de Green. On pourra donc le calculer directement. On cherche une solution avec les variables spatiales séparées, soit :

$$\mathcal{G}(x, y, z, t) = X(x, t) Y(y, t) Z(z, t) \quad (4.107)$$

$$\text{donc } \partial_t \mathcal{G} = \dot{X}YZ + X\dot{Y}Z + XY\dot{Z} \quad (4.108)$$

où le point indique la dérivée temporelle. Le terme V_c dépend uniquement de z (voir section 1.3 (page 30)). Ce qui nous donne :

$$\dot{X}YZ + X\dot{Y}Z + XY\dot{Z} = K \left[\partial_z^2 Z XY + \partial_x^2 X YZ + \partial_y^2 Y ZX \right] - YZ \left[\partial_z (V_c(z)Z) + 2h\Gamma\delta(z)Z \right] \quad (4.109)$$

Considérons, pour les fonctions X et Y , soumises uniquement à la diffusion, une solution de type "Heat Kernel", solution de l'équation de diffusion (vue en section 1.3 (page 90)) pour une source ponctuelle. Soit :

$$X(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Kt}\right) \quad (4.110)$$

$$Y(y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \exp\left(-\frac{y^2}{4Kt}\right)$$

De sorte que, en posant $r^2 = x^2 + y^2$ on obtient :

$$N(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right) Z(z, t) \quad (4.111)$$

D'autre part, d'après les équations 4.110, on a

$$\dot{X} = K \partial_x^2 X \quad (4.112)$$

$$\dot{Y} = K \partial_y^2 Y$$

Ce qui est normal étant donné que la solution a été trouvée à partir des lois de Fick qui conduit à une équation de la même forme. En simplifiant l'équation 4.109 avec 4.112, on obtient une équation portant sur z et t uniquement :

$$\dot{Z} = K \partial_z^2 Z - \partial_z (V_c(z)Z) - 2h\Gamma\delta(z)Z \quad (4.113)$$

On cherche une solution à variables séparées sous la forme : $Z(x, t) = f(z) g(t)$

$$\begin{aligned} f \dot{g} &= K \partial_z^2 f g - g (\partial_z(V_c f) + 2h\Gamma\delta(z)f) \\ \frac{\dot{g}}{g} &= \frac{1}{f} (K \partial_z^2 f - \partial_z(V_c f) - 2h\Gamma\delta(z)f) \forall t, z \end{aligned} \quad (4.114)$$

Par définition, les parties gauches et droites de l'équation dépendent indépendamment uniquement de z et de t . Pour être égales elles ne peuvent qu'être égales à la même constante, que l'on appellera $-\alpha$. La première partie de l'égalité nous donne

$$\begin{aligned} -\alpha &= \frac{\dot{g}}{g} \\ g(t) &= A e^{-\alpha t} \end{aligned} \quad (4.115)$$

On peut ici choisir $A = 1$, nous normaliserons en fait la solution de l'équation à posteriori sur les résultats des expériences. On s'intéresse maintenant à l'équation sur z

$$K \partial_z^2 f g - \partial_z(V_c f) - 2h\Gamma\delta(z)f + \alpha f = 0 \quad (4.116)$$

On résout cette équation sur l'intervalle $]0, L]$, sur lequel $V_c(z) = V_c$, l'équation devient donc

$$K \partial_z^2 f g - V_c \partial_z f + \alpha f = 0 \quad (4.117)$$

Soit Δ le déterminant de son équation caractéristique. On a :

$$\Delta = V_c^2 - 4K\alpha$$

Si $\Delta > 0$ alors la solution de l'équation différentielle est donnée par

$$f(z) = e^{\frac{V_c}{2K}z} [A \sinh(\beta z) + B \cosh(\beta z)] \quad (4.118)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{V_c^2 - 4\alpha K}{2K}} \quad (4.119)$$

Considérons la condition aux limites en $z = L$: le libre échappement, qui traduit la fin du champ magnétique galactique. À partir de cette zone, les particules s'échappent librement du halo magnétique, en conséquence, on considère leur nombre comme quasi nul :

$$f(z = L) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} 0 &= A \sinh(\beta L) + B \cosh \beta L \\ f(z) &= e^{V_c z/(2K)} \frac{A}{\cosh(\beta L)} [\sinh(\beta z) \sinh(\beta L) - \cosh(\beta z) \cosh(\beta L)] \end{aligned} \quad (4.120)$$

Qui peut être remanié pour obtenir :

$$\begin{aligned} f(z) &= A_0 e^{V_c z/(2K)} \\ A_0 &= -\frac{A}{\cosh(\beta L)} \sinh(\beta(L-z)) \end{aligned} \quad (4.121)$$

On recherche dans un premier temps les solutions paires de cette équation : $f(x) = f(-x)$, donc $f'(x) = -f'(-x)$. La fonction f doit être continue mais sa dérivée peut présenter une discontinuité. Incluons maintenant le disque galactique, en $z = 0$, pour obtenir une solution pour $z \in [-L, L]$. On intègre l'équation sur un disque infiniment mince autour de $z = 0$.

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} [K \partial_z^2 f - \partial_z(V_c f) - 2h\Gamma \delta(z)f + \alpha f] dz \quad (4.122)$$

$$K(\partial_z f(0_+) - \partial_z f(0_-)) - (V_c(0_+)f(0_+) - V_c(0_-)f(0_-)) - 2h\Gamma f(0) = 0 \quad (4.123)$$

Par définition du vent convectif, on obtient

$$V_c(0_+) = V_c \text{ et } V_c(0_-) = -V_c$$

Donc, en prenant en compte la symétrie de f et l'antisymétrie de $\partial_z f$ on a

$$K \partial_z f(0_+) = (V_c + h\Gamma)f(0) \quad (4.124)$$

En utilisant l'équation (4.120) on déduit

$$\partial_z = \frac{V_c}{2K} f(z) + A_0 e^{\frac{V_c}{2K} z} (-\beta) \cosh(\beta(L-z)) \quad (4.125)$$

En injectant l'équation (4.125) et (4.120) dans l'équation (4.124) on obtient :

$$K \left[\frac{V_c}{2K} A_0 \sinh(\beta L) - A_0 \beta \cosh(\beta L) \right] = (h\Gamma + V_c) A_0 \sinh(\beta L) \quad (4.126)$$

qui conduit à :

$$\tanh(\beta L) = -\frac{\sqrt{V_c^2 - 4\alpha K}}{V_c + 2h\Gamma} \quad (4.127)$$

On vérifie numériquement que cette équation n'admet pas de solutions, de ce fait, le discriminant Δ doit nécessairement être négatif. Ce qui conduit à la solution :

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{\frac{V_c}{2K}z} [A \sin(kz) + B \cos(kz)] \\ k &= \frac{\sqrt{4\alpha K - V_c^2}}{V_c + 2h\Gamma} \end{aligned} \quad (4.128)$$

On reprend la condition $f(L) = 0$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} f(z) &= A_0 e^{\frac{V_c}{2K}z} \sin(k(L-z)) \\ A_0 &= -\frac{A}{\cos(kL)} \end{aligned} \quad (4.129)$$

On s'intéresse toujours aux fonctions paires, on réutilise donc l'équation (4.124) avec la nouvelle forme de solution, pour trouver

$$-k \cos(kL) = \left[\frac{h\Gamma}{K} + \frac{V_c}{2K} \right] \sin(kL) \quad (4.130)$$

On pose alors :

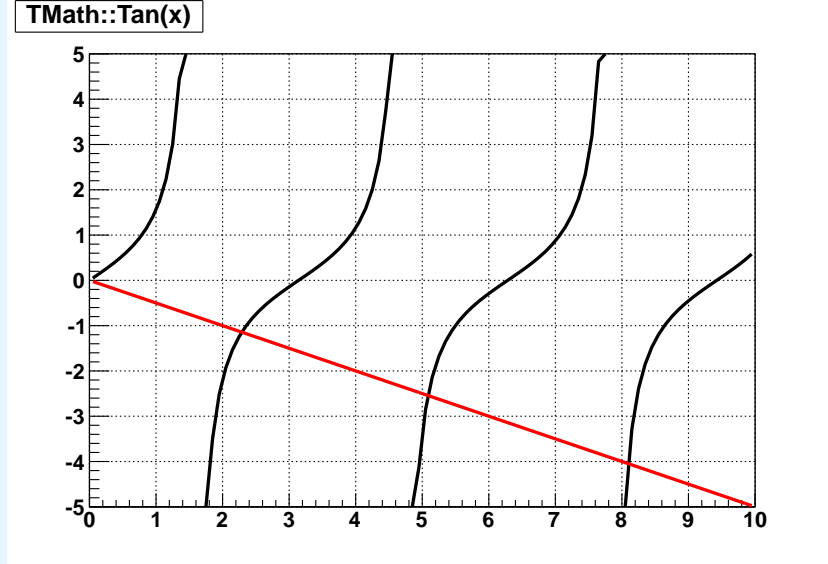
$$\begin{cases} \frac{1}{r_s} = \frac{h\Gamma}{K} \\ \frac{1}{r_w} = \frac{V_c}{2K} \end{cases} \text{ Et on définit : } \frac{L}{r_s} + \frac{L}{r_w} = \frac{1}{\rho} \quad (4.131)$$

Les équations (4.131), sont d'une importance cruciale, en effet elles font apparaître les rapports du vent convectif et de la spallation avec la diffusion. Ces rapports peuvent être simplifiés en fonction du régime considéré (purent diffusif ou purent convectif). En régime purent diffusif, $V_c \rightarrow 0$, $\Gamma \rightarrow 0$ alors $\rho \rightarrow \infty$.

En posant $x = kL$, il faut résoudre l'équation

$$-\tan x = \rho x \quad (4.132)$$

On ne peut pas trouver de solution analytique de cette équation. Les solutions correspondent aux intersections de la courbe noire et de la courbe rouge dans la figure suivante.



La fonction tangente étant périodique, il existe une infinité de solutions. On procède numériquement pour la série

$$x_n = k_n L$$

De plus

$$x_n \in [n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi]$$

Dans un régime purement diffusif, $\rho \rightarrow \infty$, alors

$$x_n \rightarrow (n - 1/2)\pi$$

Au contraire dans un régime où le vent et la spallation dominent largement, on a $\rho \rightarrow 0$ et donc

$$x_n \rightarrow n\pi$$

Finalement, on obtient pour la solution en z et t

$$f_n(z) g(t) = A_0 e^{-\alpha_n t} \exp\left(\frac{V_c}{2K} z\right) \sin(k_n(L - z))$$

On cherche des solutions paires uniquement, on aura donc :

$$f_n(z) g(t) = a_n e^{-\alpha_n t} \exp\left(\frac{V_c}{2K} |z|\right) \sin(k_n(L - |z|))$$

Toutes les fonctions f_n forment une base dont chacun des éléments est solution de l'équation différentielle. Nous allons donc étudier cette base. On ne s'intéresse qu'à la partie dépendante de n : $\sin(k_n(L - |z|))$

On définit le produit scalaire entre deux fonctions $a(z)$ et $b(z)$ sur le domaine s'étendant de $-L$ à L comme :

$$\langle b|a \rangle = \int_{-L}^L b^*(z) a(z) dz \quad (4.133)$$

Ici nous avons

$$\langle m|n \rangle = \int_{-L}^L \sin^*(k_m(L - |z|)) \sin(k_n(L - |z|)) dz \quad (4.134)$$

$$= 2 \int_0^L \sin(k_m(L - z)) \sin(k_n(L - z)) dz \quad (4.135)$$

$$= \int_0^L (\cos((k_m - k_n)(L - z)) - \cos((k_m + k_n)(L - z))) dz$$

En posant $u = L - z$, on obtient :

$$\langle m|n \rangle = \int_0^L \cos((k_m - k_n)u) du - \frac{1}{k_m + k_n} [\sin((k_m + k_n)u)]_0^L \quad (4.136)$$

Si $k_m \neq k_n$ alors :

$$\langle m|n \rangle = \frac{1}{k_m - k_n} [\sin((k_m - k_n)u)]_0^L - \frac{1}{k_m + k_n} [\sin((k_m + k_n)u)]_0^L \quad (4.137)$$

Qui conduit, après remaniement des termes à :

$$\langle m|n \rangle = \sin(k_m L) \cos(k_n L) \frac{2k_n}{k_m^2 - k_n^2} - \sin(k_n L) \cos(k_m L) \frac{2k_m}{k_m^2 - k_n^2} \quad (4.138)$$

On utilise l'équation (4.132) pour la réinjecter dans le résultat trouvé, ce qui conduit à

$$\begin{aligned}\langle m|n\rangle &= \frac{-2}{k_m^2 - k_n^2} \frac{1}{\rho L} (-\sin(k_m L) \cos(k_n L) \tan(k_n L) + \sin(k_n L) \cos(k_m L) \tan(k_m L)) \\ \langle m|n\rangle &= 0\end{aligned}\quad (4.139)$$

Si $k_m = k_n$, reprenons l'équation (4.136) pour obtenir :

$$\langle n|n\rangle = L - \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n L) \geq 0 \quad (4.140)$$

Les fonctions $|n\rangle$ sont donc orthogonales et leur norme est définie positive, on la note C_n :

$$\langle m|n\rangle = \left(L - \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n L) \right) \delta_{mn} = C_n \delta_{mn} \quad (4.141)$$

On cherche maintenant à normer cette base. Soit $f(z)$ une fonction paire, elle peut être développée sur la base construite

$$|f\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} a_m |m\rangle$$

Le produit scalaire $\langle n|f\rangle$ est défini par

$$\langle n|f\rangle = \int_{-L}^L \sin(k_n(L - |z|)) f(z) dz = \langle n| \sum_{m=1}^{\infty} a_m |m\rangle \quad (4.142)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \langle n|m\rangle = a_m \delta_{nm} C_n = C_n a_n \quad (4.143)$$

donc

$$a_n = \frac{1}{C_n} \int_{-L}^L \sin(k_n(L - |z|)) f(z) dz \quad (4.144)$$

La base est orthonormée, nous avons construit notre fonction f , combinaison linéaire des fonctions de base paires, nous pouvons donc réécrire la solution en z , $Z(z, t)$:

$$Z(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha_n t} \exp\left(\frac{V_c}{2K} |z|\right) \sin(k_n(L - |z|)) \quad (4.145)$$

Pour utiliser la condition initiale $Z(z, 0) = \delta(z - z_s)$ on écrit

$$\begin{aligned} Z(z, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{V_c}{2K}|z|\right) \sin(k_n(L - |z|)) \\ Z(z, 0) \exp\left(-\frac{V_c}{2K}|z|\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n(L - |z|)) \end{aligned} \quad (4.146)$$

qui peut aussi être écrit :

$$f(z) = \langle z|f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle z|n \rangle \quad (4.147)$$

avec

$$\langle z|f \rangle = Z(z, 0) \exp\left(-\frac{V_c}{2K}|z|\right) \quad (4.148)$$

et donc en utilisant l'équation (4.144), on obtient :

$$a_n = \frac{1}{C_n} \int_{-L}^L \sin(k_n(L - |z|)) Z(z, 0) \exp\left(-\frac{V_c}{2K}|z|\right) dz$$

Reprenons la condition initiale $Z(t = 0) = \delta(z - z_s)$, pour avoir finalement :

$$a_n = \frac{1}{C_n} \sin(k_n(L - |z_s|)) \exp(-V_c|z_s|/(2K))$$

En combinant toutes les solutions (4.110), (4.145) et (4.149):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y, z, t \geq 0) &= X(x, t) Y(y, t) Z(z, t) \\ &= \frac{1}{4\pi K t} e^{-r^2/(4Kt)} e^{V_c|z|/(2K)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n t} \frac{1}{C_n} \sin(k_n(L - |z_s|)) e^{-V_c|z_s|/(2K)} \sin(k_n(L - |z|)) \end{aligned} \quad (4.149)$$

Nous avons résolu la partie symétrique de la solution. On se penche maintenant vers la partie anti symétrique. On repart de l'équation caractéristique 7.20 pour étudier les déterminants. Si $\Delta > 0$ nous avons vu que la forme de la solution est du type :

$$f(z) \sim e^{V_c z/(2K)} \sinh(\beta(L - z))$$

Or nous recherchons des solutions impaires. Par définition, une telle solution doit s'annuler en $z = 0$, ce qui ne peut pas être le cas avec une telle forme de solution. On considère donc encore une fois $\Delta < 0$. Qui donne une solution de la forme :

$$f(z) = A'_0 e^{V_c z / (2K)} \sin(k'(L - z)) \quad (4.150)$$

La condition $f(z = 0) = 0$ nous donne tout de suite $\sin(k'L) = 0$. Il est inutile d'intégrer l'équation autour de $z = 0$ comme dans le cas des fonctions paires car ici étant donné les prescriptions sur la parité de la fonction, la condition ne nous donnerait aucune information supplémentaire. La seule condition $\sin(k'_n L) = 0$ suffit. On a

$$\sin(k'_n(L - z)) = \sin(k'_n L) \cos(k'_n z) - \sin(k'_n z) \cos(k'_n L) = (-1)^{n+1} \sin(k'_n z)$$

Cette fonction est impaire, et pour assurer que la solution totale soit impaire on choisit la solution

$$f_n(z) = b_n e^{V_c |z| / (2K)} \sin(k'_n(L - z)) \quad (4.151)$$

Encore une fois on cherche à reconstruire la base des solutions de l'équation. On a

$$\begin{aligned} \langle m' | n' \rangle &= \int_{-L}^L \sin^*(k'_m(L - z)) \sin(k'_n(L - z)) dz \\ &= 2 \int_0^L \sin^*(k'_m(L - z)) \sin(k'_n(L - z)) dz \end{aligned} \quad (4.152)$$

qui a déjà été calculée précédemment. En posant $k_n L = n\pi$ et $k_m L = m\pi$ dans l'équation (4.138) on voit tout de suite que si $k'_m \neq k'_n$ on a

$$\langle m' | n' \rangle = 0$$

Si $k'_m = k'_n$ on repart de l'équation (4.140) pour avoir

$$\langle n' | n' \rangle = L - \frac{1}{2k'_n} \sin 2k'_n L = L \quad (4.153)$$

que nous appellerons C'_n . Au final :

$$\langle m' | n' \rangle = L \delta_{n'm'} = C'_n.$$

On construit la base des solutions de l'équation différentielle

$$|f\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} b_m |m\rangle$$

et donc

$$\langle n|f\rangle = \int_{-L}^L \sin(k_n(L-z))f(z)dz = \langle n|\sum_{m=1}^{\infty} b_m|m\rangle \quad (4.154)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \langle n|b_m|m\rangle = C'nb_n \quad (4.155)$$

$$a_n = \frac{1}{C'_n} \int_{-L}^L \sin(k_n(L-z))f(z)dz$$

On construit la solution associée :

$$Z(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha_n t} \exp\left(\frac{V_c}{2K}|z|\right) \sin(k'_n(L-z)) \quad (4.156)$$

On utilise la condition initiale $Z(z, 0) = \delta(z - z_s)$

$$Z(z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(\frac{V_c}{2K}|z|\right) \sin(k'_n(L-z)) \quad (4.157)$$

$$Z(z, 0) \exp\left(-\frac{V_c}{2K}|z|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k'_n(L-z))$$

que l'on réécrit :

$$f(z) = \langle z|f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \langle z|n\rangle \quad (4.158)$$

avec

$$\langle z|f\rangle = Z(z, 0) \exp\left(-\frac{V_c}{2K}|z|\right) \quad (4.159)$$

qui nous permet d'obtenir

$$b_n = \frac{1}{C'_n} \int_{-L}^L \sin(k'_n(L-z)) Z(z, 0) \exp\left(-\frac{V_c}{2K}|z|\right) dz \quad (4.160)$$

On obtient finalement la solution complète de l'équation différentielle en combinant les solutions paires et impaires

$$\mathcal{G}(x, y, z, t \geq 0) = \frac{1}{4\pi K t} e^{V_c(|z-z_s|/(2K))} \quad (4.161)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{C_n} e^{-\alpha_n t} \sin(k_n(L-|z_s|)) \sin(k_n(L-|z|)) + \frac{1}{C'_n} e^{-\alpha'_n t} \sin(k'_n(L-z_s)) \sin(k'_n(L-z)) \right\} \quad (4.162)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} k'_n = \frac{n\pi}{L} \\ 1/\rho = L \left(\frac{h\Gamma}{K} + \frac{V_c}{2K} \right) \\ C_n = L \left(1 + \frac{1}{\rho} \text{sinc}^2(k_n L) \right) \\ C'_n = L \\ \alpha_n = K \left(k_n^2 + \left(\frac{V_c}{2K} \right)^2 \right) \\ \alpha'_n = K \left(k_n'^2 + \left(\frac{V_c}{2K} \right)^2 \right) \end{array} \right. \quad (4.163)$$

$$k_n \text{ solution de } \tan(k_n L) = -\rho k_n L$$

Ces solutions seront abondamment utilisées dans cette thèse, par conséquent nous aurons tout le loisir de revenir dessus. Nous allons maintenant aborder la forme du coefficient de diffusion. Enfin nous essaierons de comprendre le sens des solutions que l'on a trouvées, et surtout d'étudier leur comportement en fonction du domaine énergétique.

RÉFÉRENCES

- Barton, G. 1989, Elements of Green's functions and propagation : potentials, diffusion, and waves (Oxford ; New York : Clarendon Press ; Oxford University Press)
- Donato, F., Maurin, D., & Taillet, R. 2001, A&A, 381, 539
- Durand, E. 1966, Électrostatique Tome II Problèmes généraux, conducteurs (Paris Masson)
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Jeffrey, A., & Zwillinger, D. 2007, Table of Integrals, Series, and Products
- Kibler, M. 2001, Eléments de mathématiques pour la physique et la chimie : avec 230 exemples et 230 exercices et problèmes (Paris : Editions Scientifiques GB)
- Maurin, D. 2001, PhD thesis
- Shalchi, A. 2009, Nonlinear Cosmic Ray Diffusion Theories (Springer New York)
- Taillet, R., Salati, P., Maurin, D., Vangioni-Flam, E., & Cassé, M. 2004, The Astrophysical Journal, 609, 173
- Weisstein, E. W. 2013, Bessel Function of the First Kind – from Wolfram MathWorld, [http ://math-world.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html](http://math-world.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html)

Jusqu'à présent nous n'avons pas détaillé le coefficient de diffusion. Seules des valeurs typiques ont été utilisées pour effectuer des calculs d'ordre de grandeur. Nous allons voir ici que son expression est très importante car au-delà de quelques centaines de GeV le processus de diffusion domine la convection et la spallation dans les modèles de propagation. Le coefficient de diffusion est donc directement responsable de la forme et de la pente du spectre de rayonnement cosmique dans cette gamme d'énergie. Nous l'avons vu en section 3.4 (page 70), le comportement du champ magnétique est directement en lien avec le processus de diffusion, il est donc capital d'essayer de tirer le maximum d'informations possibles de ce coefficient. Les principales informations que nous pouvons déduire de l'étude des flux de protons et d'héliums sont les valeurs de ces coefficients de diffusion ainsi que leur comportement en fonction de l'énergie.

Il existe différentes façons d'aborder le problème, nous avons vu en détails dans la section 3.4 (page 70) un exemple d'approche en partant des propriétés microscopiques du milieu et il a été montré que le coefficient de diffusion n'est à priori ni isotrope ni uniforme dans la galaxie. Une approche consiste donc à résoudre le problème de la propagation d'une espèce de rayon cosmique dans la galaxie avec un coefficient de diffusion arbitraire dans chaque direction de la galaxie. Un tel coefficient n'étant pas uniforme et dépendant du champ magnétique, cette résolution doit être couplée avec des cartes de champ magnétique galactique. Dans les résolutions que nous avons approchées dans ce chapitre nous n'avons pas cherché un tel niveau de raffinement dans nos modèles car il faut alors considérer une approche purement numérique. Néanmoins cette méthode est nécessaire et c'est le cœur des codes de propagation modernes. Dans cette thèse nous considérons un coefficient de diffusion purement effectif assez simple. En conséquence il est plus difficile à relier théoriquement aux aspects microscopiques du plasma interstellaire. Cependant la rapidité de résolution de nos modèles et les solutions semi-analytiques nous permettront d'être plus efficace qu'un calcul numérique sur trois points :

- La rapidité de calcul d'un flux permet de scanner l'espace de paramètres assez rapidement (calcul de nombreux flux avec différents paramètres de propagation). Ce point a déjà permis lors d'études précédentes de calculer des paramètres de propagation typiques permettant de retrouver les rapports d'abondances de rayons cosmiques primaires / secondaires (Maurin et al. 2001). C'est aussi une approche très pratique pour évaluer un grand nombre de modèles théoriques et faire du calcul d'incertitudes théoriques (Delahaye et al. 2007).
- L'aspect semi-analytique des solutions permet de les tester statistiquement rapidement. C'est le propos de la partie II de cette thèse. Nous verrons que nous pouvons calculer des moyennes de distributions statistiques de flux de protons dans la galaxie bien plus rapidement.
- Les calculs numériques d'anisotropie peuvent être longs car ils impliquent souvent de modéliser des cartes du ciel. Il s'agit donc de calculer le flux en tout point d'une sphère, nous avons donc tout intérêt à pouvoir effectuer de nombreux calculs de flux rapidement.

Ces trois raisons font que nous avons choisi dans cette thèse un coefficient de diffusion effectif simple. Pour le moment, nous n'avons pas encore évoqué la forme que nous allons choisir pour celui-ci. Nous allons ici montrer comment choisir un coefficient conduisant à des résultats physiques. Puis nous étudierons l'effet d'un tel coefficient sur l'équation de diffusion.

1 LES FORMES COMPLÈTES DU COEFFICIENT DE DIFFUSION

Dans la section 3.5 (page 76), nous avons évoqué les équations détaillées de la physique de la propagation. Nous avons vu qu'une turbulence dans le champ magnétique d'un plasma engendrait un phénomène de propagation diffusive des particules du plasma. Ces équations nous permettent d'écrire le coefficient de diffusion en fonction de tous les paramètres du champ magnétique. Notamment nous avons montré que dans le cas de l'approximation quasi-linéaire une forme possible du coefficient de diffusion parallèle aux lignes de champ magnétique est donnée par

$$D_{\parallel}^{\text{slab}} \approx \frac{\ell_{\text{slab}}}{16\pi C(\nu)} \nu \left(\frac{B_0}{\delta B_{\text{slab}}} \right)^2 R^{2-2\nu} \frac{2}{(1-\nu)(2-\nu)} \quad (5.1)$$

De façon plus générale il peut être réécrit

$$D_{\parallel}^{\text{slab}} = D_0 \beta \mathcal{R}^{\delta} \quad (5.2)$$

On pourrait donc directement proposer de choisir un tel coefficient. Cependant, ce coefficient de diffusion dépend de la forme des lignes de champ, donc de chaque point de l'espace, de la composition spectrale de la turbulence et de l'amplitude des turbulences. De plus ce coefficient rentre dans le cadre d'un modèle de diffusion qui souffre encore de certains défauts. Son utilisation implique plusieurs contraintes : tout d'abord $\delta B \ll B$, d'autre part l'isotropie et l'homogénéité du coefficient ne sont plus valables puisqu'ils dépendent de la direction des lignes de champ et de l'intensité du champ en un point donné de la galaxie. On ne peut donc pas exposer dans un premier temps d'argument fort pour choisir un tel coefficient. Cependant, nous verrons par la suite que des arguments physiques conduisent à une forme similaire. Nous nous servirons alors quand même de l'analogie avec cette méthode pour supposer que :

- L'indice spectral δ dépend de nature de la turbulence.
- Le coefficient D_0 dépend de la nature de la turbulence mais aussi de l'intensité des fluctuations.

Encore une fois ce sont des analogies, et nous avons vu à la fin de la section 3.4 (page 70) que des modèles de diffusion plus évolués pouvaient conduire à des indices spectraux différents pour le même type de turbulence. Pour illustrer ce propos voici un exemple : dans le formalisme de ce

paragraphe, une turbulence de type Kolmogorov, nous l'avons vu en section 3.4 (page 70) conduirait à un indice spectral de $\delta = 1/3$. Pourtant nous ne pouvons pas rejeter un modèle présentant un indice δ différent en opposant l'argument que dans ce cas la turbulence n'est plus universelle et donc plus de Kolmogorov. Il s'agit peut être de la même turbulence mais dans un formalisme différent. (Ajoutons également que dans cet exemple précis on pourrait aussi arguer de l'existence d'autres types de turbulences).

2 UN COEFFICIENT DE DIFFUSION EN LOI DE PUISSANCE

Dans la section 2 (page 39) nous avons montré que les rayons cosmiques peuvent être accélérés par des supernovæ. Nous avons également mentionné les mécanismes d'accélération de Fermi d'ordre 1 et d'ordre 2 conduisant chacun à une loi de puissance. Nous avons dégagé un mécanisme préférentiel, avec un taux de rayons cosmiques produits en fonction de l'énergie de la forme :

$$q_{acc} = q_0 (\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)^\alpha \quad (5.3)$$

où $\mathcal{R} \equiv p/Z$ est la rigidité de la particule. Pour finir, prenons la solution stationnaire de l'équation de propagation dans le cadre d'un disque infiniment mince donnée par (4.61). Plaçons-nous dans un contexte dans lequel les effets du vent convectif et de la spallation sont négligeables (nous verrons plus tard que ça correspond à un régime de propagation au dessus de 100 GeV). On a $V_c/D \rightarrow 0$ et $V_c + h\Gamma \ll D/R$. Dans ce cas, en se plaçant en $z = L$, la solution de l'équation de propagation est donnée par :

$$N(r, z) = \sum_i \frac{\tilde{q}_i(E)}{D(E) S_i \coth(S_i L/2)} J_0\left(r \frac{\zeta_i}{R}\right) \quad (5.4)$$

En prenant $\tilde{q}_i(E) = Q(E)f_i(r)$, alors la dépendance en énergie de la solution est uniquement proportionnelle à

$$\frac{Q(E)}{D(E)} = \frac{Q(\mathcal{R})}{D(\mathcal{R})}$$

Il est possible de comparer cette dépendance avec le spectre du rayonnement cosmique observé. Entre 100 GeV et 10^6 GeV, le rayonnement cosmique suit une loi de puissance (moyennant un petit défaut de structure qui sera au cœur de la deuxième partie de cette thèse). Pour reproduire les observations, le flux que nous calculons (et par extension N la densité de cosmiques) doit reproduire une telle loi de puissance. L'estimation de la pente observée du spectre du rayonnement cosmique donne un indice spectral compris entre 2.85 et 2.87. Or les théories d'accélération du rayonnement cosmique

montrent que l'indice α dans q_{acc} doit se situer autour de $\alpha = 2$ (voir section 2 (page 39)). À lui seul il ne peut pas atteindre des valeurs suffisantes pour assurer la totalité de la pente du spectre observée. En supposant notre modèle de diffusion valable, le reste de la pente doit être assuré par D le coefficient de diffusion. Celui-ci doit donc nécessairement dépendre de l'énergie d'une part, mais d'autre part il suit, à l'ordre 0, une loi de puissance. Cette étude transposée à toutes les espèces de rayons cosmiques nous montre que, plus qu'une dépendance en énergie il s'agit d'une dépendance en rigidité.

A priori on peut choisir une forme assurant de reproduire la forme de ce spectre du type $D = D_0 \mathcal{R}^\delta$ mais il se trouve que l'on choisit généralement une forme légèrement plus évoluée assurant un bon accord avec les mesures du rapport des espèces primaire/ secondaire. La forme que nous utilisons tout au long de cette thèse sera donc :

$$D = D_0 \beta \mathcal{R}^\delta \quad (5.5)$$

Avec deux paramètres libres : un coefficient de normalisation D_0 donné en $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$, et δ assurant le reste de la pente de diffusion. Ironiquement, après avoir mis en garde sur le fait de ne pas utiliser brutalement une forme du type de celle l'équation (5.2), des arguments simples nous conduisent au même comportement. Cependant certaines études proposent parfois des formes légèrement plus évoluées pour essayer d'atteindre un meilleur accord avec les observations (Coste et al. 2011).

Un des objectifs de la physique des astroparticules est de comprendre la turbulence du champ magnétique. Une manière indirecte de la contraindre et d'essayer de contraindre δ et D_0 . Dans les modèles les plus simples de diffusion, la pente du spectre de rayons cosmiques est égale à $\alpha + \delta$. En faisant une analogie avec (5.2) on peut supposer que le coefficient δ vient du spectre de turbulence magnétique, et D_0 est lié à l'amplitude des perturbations et également au spectre de turbulence. Mais cette analogie est à prendre avec des précautions, les modèles compliqués de coefficient de diffusion ne sont pas aussi lisibles que (5.2), ils sont généralement calculés numériquement, mais bien plus précis et ne permettent pas encore de trancher sur la vraie nature de D_0 et δ .

3 LES ÉTUDES PRÉCÉDENTES ET LE SUCCÈS DU MODÈLE DE DIFFUSION

La forme du coefficient de diffusion utilisé ici a déjà été utilisée dans plusieurs études. Il a été possible de reproduire les données des rapports primaires/secondaires avec un ajustement des paramètres de propagation D_0 et δ . L'avantage est qu'il est possible ensuite de travailler sur d'autres flux en conservant les mêmes paramètres de propagation. En effet si on considère que les paramètres D_0 et δ ne dépendent que de la nature de la turbulence magnétique et de son amplitude, alors seule la rigidité change d'une espèce à une autre et il est a priori possible d'utiliser les valeurs de paramètres

de propagation déduits d'une étude comme entrée pour d'autres problèmes. Nous verrons que cette approche a par exemple permis de contraindre certains modèles de matière noire.

3.1 Les paramètres de propagation et le B/C

Dans cette thèse l'accent est mis sur les protons cosmiques (et sur les héliums dans un deuxième temps), mais il ne faut également pas oublier que le spectre du rayonnement cosmique est constitué de nombreuses espèces plus lourdes que l'hélium : les "métaux". Ces espèces sont séparées en deux catégories : les primaires, accélérés directement dans les sources, et les secondaires, produits de l'interaction des primaires avec le milieu interstellaire. On peut se douter, de par leur nature différente, que ces deux types d'espèces ne sont pas sensibles aux mêmes phénomènes du milieu interstellaire. À titre d'exemple les secondaires ne sont pas sensibles à l'accélération. Il est possible de montrer théoriquement à partir de modèle de diffusion stationnaire que les couples primaires/secondaires sont très sensibles au paramètre D_0/L . Le rapport de leur flux est donc une bonne mesure pour ajuster les paramètres de propagation.

Parmi les couples primaires/secondaires il existe un couple de noyaux père/fils (désignés ainsi car le primaire, le père, peut engendrer le fils via une interaction avec le milieu interstellaire) mesuré depuis longtemps par les expériences de rayonnements cosmiques : le couple Bore / Carbone (ou B/C). Il a donc été utilisé dans le cadre du modèle stationnaire pour contraindre les paramètres de propagation, et particulièrement D_0/L . En première approche ce n'est pas un ajustement direct de D_0 mais ce peut être un avantage. En effet, dans cette thèse, ainsi que dans l'étude du B/C, les modèles utilisés font appel à un coefficient de diffusion isotrope. Or dans le disque, comme nous l'avons mentionné dans la section 1.2 (page 27), loin du centre galactique les lignes de champ magnétique ont tendance à être plutôt perpendiculaires au plan galactique. Dans ce cas la diffusion devrait théoriquement être anisotrope, donc la vitesse moyenne des particules aussi. La conséquence est qu'un choix de coefficient de diffusion isotrope conduit, soit à trop d'échappement des particules par les bords verticaux, soit pas assez. Cet effet est le même qu'une mauvaise détermination de L . Le rapport D_0/L est donc moins sensible à ce genre de problèmes.

L'étude du B/C a également donné lieu à la naissance d'un code de propagation de rayons cosmiques avec résolution semi-analytique : USINE (Maurin 2011). En combinant ce code de propagation avec des méthodes Monte-Marlo Markov-Chain (méthodes statistiques efficaces pour déterminer les meilleurs ajustements des paramètres d'un modèle), un espace de paramètres compatibles avec les mesures de Bore / Carbone prises par la mission HEAO-3 (Engelmann et al. 1990) a pu être déterminé (Maurin et al. 2002). Ces mesures sont effectuées autour du GeV, donc dans une zone pour laquelle la réaccélération telle que discutée en section 1.5 (page 34) est effective et le vent convectif efficace. L'étude de l'espace des paramètres porte donc sur D_0, L, δ, V_c, V_a avec V_a la vitesse des ondes d'Alfvén dans le milieu. Parmi les études sur le B/C l'espace de paramètres compatibles déterminé par (Putze et al. 2010) est donné sur la figure 5.1

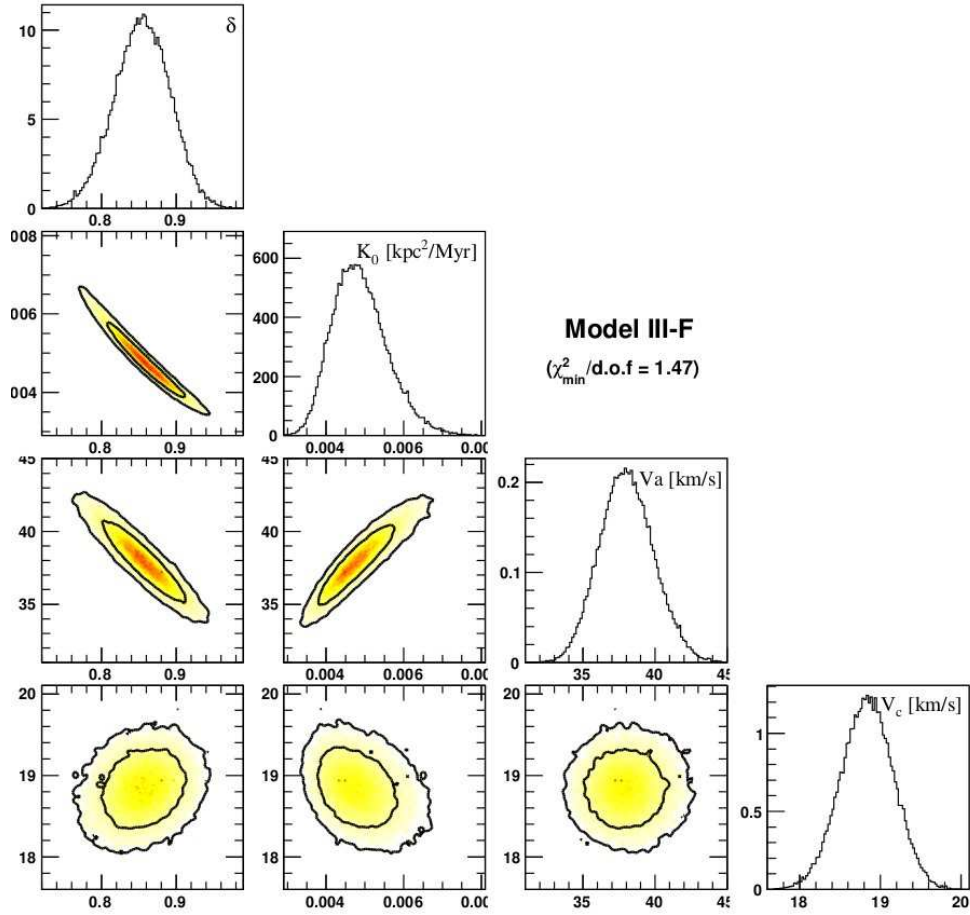


FIGURE 5.1: Espace de paramètres compatibles avec les mesures de B/C (Putze et al. 2010)

De ces études, 3 jeux de paramètres ont été dégagés prenant en compte la hauteur L du halo magnétique. Deux jeux représentent des extrema de l'espace des paramètres et le troisième est situé au milieu, on les appelle donc "min", "med" et "max" (voir 8.1). Le paramètre min correspond aux plus petites valeurs de L et D_0 et le max a leur plus grandes valeurs. Le modèle contraint en fait assez peu δ . On peut comparer les valeurs de D_0 obtenues avec la valeur estimée d'après le coefficient de diffusion 5.1, ce dernier prédit une valeur de D_0 deux ordres de grandeurs supérieurs au coefficient D_0 du modèle max. Ce résultat montre bien que malgré leurs formes similaires on ne peut pas simplement les comparer. Aujourd'hui on pense que la mesure la plus efficace pour contraindre le coefficient de diffusion est la mesure d'anisotropie, sur laquelle nous reviendrons en troisième partie. La détermination des paramètres de propagation a permis d'étudier les flux d'antiparticules, et notamment les observables que l'on appelle la fraction positonique et le rapport antiprotons sur protons. Pour ces canaux on mesure plus souvent des rapports car souvent la mesure d'une particule et de son antiparticule engendre des incertitudes de mesures systématiques de même nature. Mesurer le rapport de ces espèces permet de réduire ces incertitudes et d'obtenir des observables plus précises.

TABLE 5.1: Paramètres de diffusion pour min, med et max

modèle	D_0 (kpc ² · My ⁻¹)	δ	L (kpc)	V_c (km · s ⁻¹)
min	0.0016	0.85	1	13.5
med	0.0112	0.7	4	12
max	0.0765	0.46	15	5

3.2 Les études d'antiprotons

Les canaux d'antiparticules sont des canaux privilégiés pour la détection de matière noire. En effet parmi toute les interactions prédites dans le milieu interstellaire, la production d'antimatière par des réactions de matière noire permet de produire des flux de l'ordre de grandeur de l'antimatière créée par les processus "classiques" de la galaxie. Les antiprotons sont des particules secondaires dans la galaxie, ils sont issus des spallations de protons sur le milieu interstellaire, il est donc possible d'évaluer cette composante secondaire grâce aux modèles de propagation stationnaires en y insérant les paramètres de propagation dérivés du B/C. La présence éventuelle de matière noire aurait pour effet de produire spontanément des antiprotons partout dans le halo de matière noire, il en ressortirait donc une composante primaire. L'étude de la composante secondaire (voir figure 5.2) montre que les flux secondaires d'antiprotons calculés sont compatibles avec les observations.

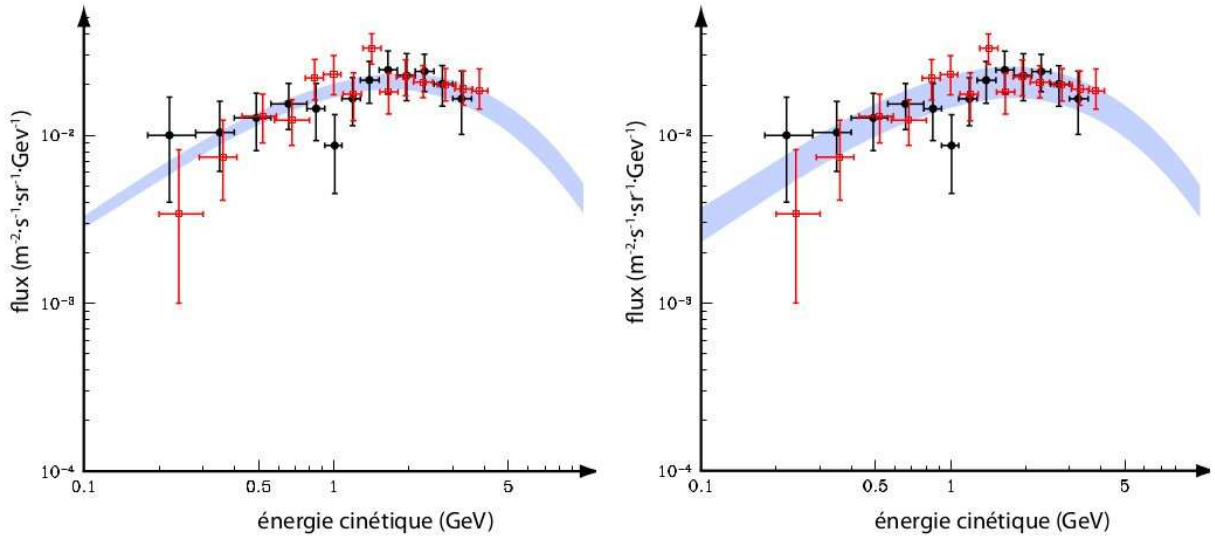


FIGURE 5.2: Flux d'antiprotons obtenus en variant les paramètres de propagation (bande bleue à gauche) et en faisant varier les sections efficaces nucléaires (bande bleue à droite) (Taillet 2010)

Ces prédictions semblent suffire, il n'y a a priori aucune raison d'ajouter de composante primaire

exotique dans cette gamme d'énergie. Pourtant, calculer le flux d'antiprotons primaires permet de fixer des contraintes fortes sur les caractéristiques des particules de matière noire. Sur la figure 5.3 on trace le flux d'antiprotons primaires obtenu pour différentes masses et modèles de matière noire. Certains modèles engendrent des excès d'antiprotons incompatibles avec les observations. Dans tous les cas, il faut remarquer que les traces de matière noire dans le flux d'antiprotons sont inférieures à l'incertitude théorique sur la propagation (ces incertitudes étant dues à l'étendue de l'espace des paramètres de propagation compatibles avec le B/C). Ce problème montre l'intérêt de trouver de nouvelles observables pour contraindre l'espace de paramètres (comme l'anisotropie).

3.3 Les positons

Pour finir, mentionnons les études sur les flux de positons et notamment la fraction positonique (qui correspond au rapport $(e^+ + e^-)/e^-$). Comme les antiprotons, il s'agit d'un canal préférentiel pour la désintégration de particules de matière noire. Il est la cible de nombreuses études car les mesures de l'expérience PAMELA ont mis en évidence une augmentation de cette fraction autour du GeV, là où les modèles simples de propagation s'attendaient à voir une chute de ce rapport. L'expérience AMS-02 a confirmé cette tendance, a affiné les mesures et a réduit les incertitudes (voir la figure 5.4). Les études de propagation menées sur ces espèces sont plus délicates que pour les noyaux pour plusieurs raisons : la propagation des électrons est dominée par les pertes énergétiques. D'autre part, les électrons proviennent de sources beaucoup plus variées que les protons et pour pouvoir prendre en compte d'éventuelles sources proches, comme les pulsars, il faut traiter le problème en non stationnaire. Il se trouve que ces pulsars sont susceptibles de créer des paires d'électrons-positons, ils sont donc également des sources d'antimatière. L'étude de (Delahaye et al. 2010) sur les électrons et positons a montré que la fraction positonique était sous-estimée si les pulsars n'étaient pas pris en compte, ce qui a permis de réduire l'écart avec la fraction positonique mesurée. De plus, le calcul des erreurs théoriques sur l'estimation de ces flux menés par (Delahaye et al. 2007) a montré qu'en fait, les incertitudes théoriques associées au calcul de la fraction positonique rendait compatible les mesures de PAMELA avec le flux prédit. Cet argument est d'autant plus recevable que le flux d'électrons à haute énergie n'est pas encore mesuré et est extrapolé à partir des mesures à basse énergie. Sur la figure 5.5 on peut voir qu'avant l'arrivée des résultats d'AMS-02, la fraction positonique restait dans les incertitudes théoriques dans le cadre d'une extrapolation "molle" du spectre d'électrons. L'arrivée d'AMS-02 a poursuivi la tendance à l'augmentation de la fraction positonique avec l'énergie. Les deux explications les plus avancées pour ce comportement sont les pulsars ou la matière noire. Le problème d'une composante de matière noire est qu'elle implique l'augmentation du flux d'antiprotons. L'augmentation prédite par des modèles de matière noire peut conduire à des flux d'antiprotons trop élevés. Un moyen de contourner le problème est de postuler l'existence de matière noire dite leptophile (Das & Mohanty 2013). Il s'agit d'un type de matière noire n'interagissant qu'avec les leptons, n'influant donc pas sur le flux d'antiprotons. Néanmoins des études théoriques (Yin et al. 2013), montrent que seulement deux pulsars locaux suffisent à reproduire la fraction positonique.

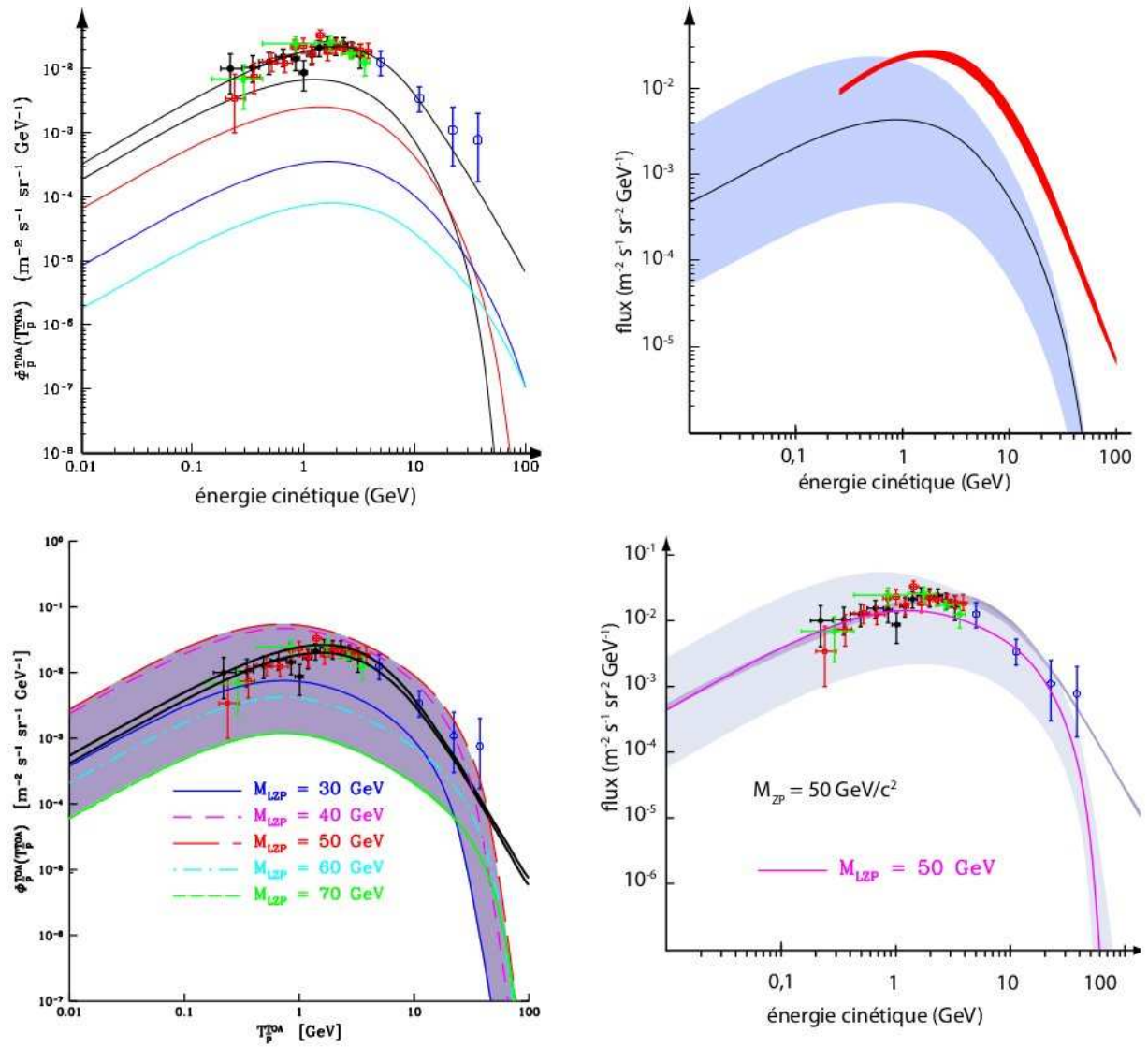


FIGURE 5.3: En haut à gauche : les courbes pleines colorées représentent les flux d'antiprotons primaires obtenus pour des particules de matière noire de type neutralino (en haut) pour plusieurs masses. La courbe noire du haut représente la somme des antiprotons secondaires et des primaires provenant d'interaction de matière noire. En haut à droite : les flux d'antiprotons primaires obtenus pour des particules de matière noire de masses différentes ont été regroupé dans la bande bleue représentant l'incertitude théorique, la bande rouge représente le flux secondaire obtenu sans postuler l'existence de matière noire. En bas : les courbes colorées représentent le flux d'antiprotons primaires obtenus pour des particules de matière noire de type Kaluza-Klein (les valeurs sont regroupées dans la bande bleue). La courbe noire représente le flux total d'antiprotons (secondaires plus primaires) (Taillet 2010).

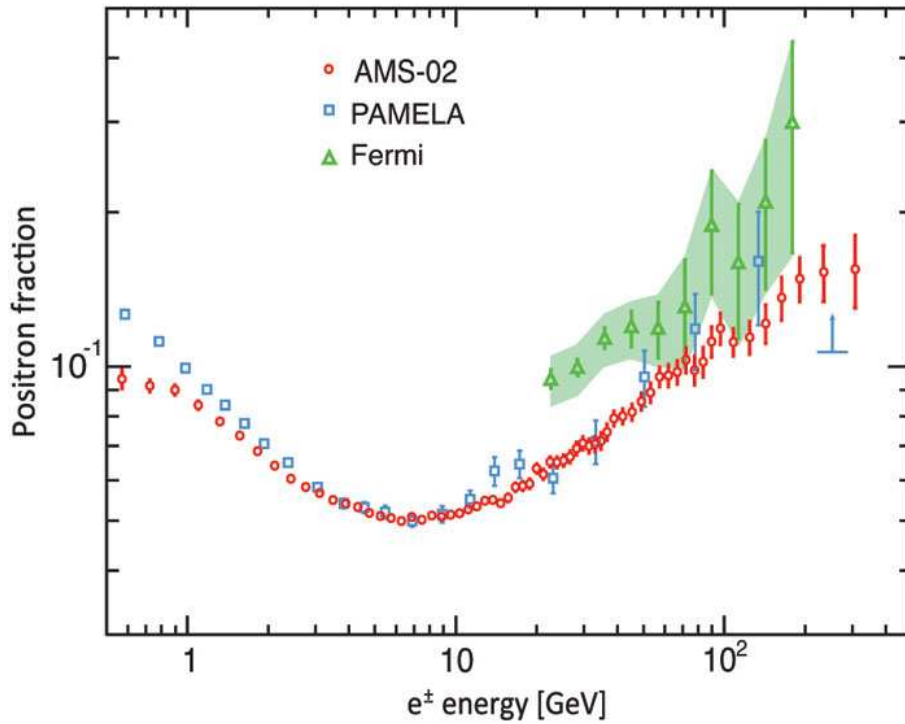


FIGURE 5.4: Mesures de la fraction positronique par les expériences PAMELA et AMS-02 ([Adriani et al. 2013](#); [Aguilar et al. 2013](#))

Pour trancher le débat il faudrait pouvoir prendre des mesures à haute énergie, dans des gammes où les modèles de pulsars et de matière noire donnent des résultats significativement différents. Notons également que le durcissement du spectre tel qu’observé par CREAM et PAMELA a un impact important sur les cosmiques secondaires. Des études prenant en compte ces nouveaux résultats ont montré que le flux de positons secondaires calculé théoriquement était jusqu’à présent sous-estimé, l’augmentation pouvant atteindre 60% du flux déjà observé à 100 GeV ([Lavalley 2010](#)).

Les études d’anisotropies sur les directions d’incidence des protons et positons seront également très efficaces pour distinguer les modèles astrophysiques des modèles de matière noire puisque les pulsars et la matière noire ne sont pas répartis de la même façon dans la galaxie. De telles études pourront être menées au sol grâce à des télescopes Cherenkov suffisamment puissants ([Linden & Profumo 2013](#)).

Le coefficient de diffusion est maintenant décrit. Nous avons vu diverses applications du modèle de diffusion qui permettent d’être prédictif et compatible avec les observations. Nous allons maintenant aborder le comportement des solutions du modèle dans notre contexte.

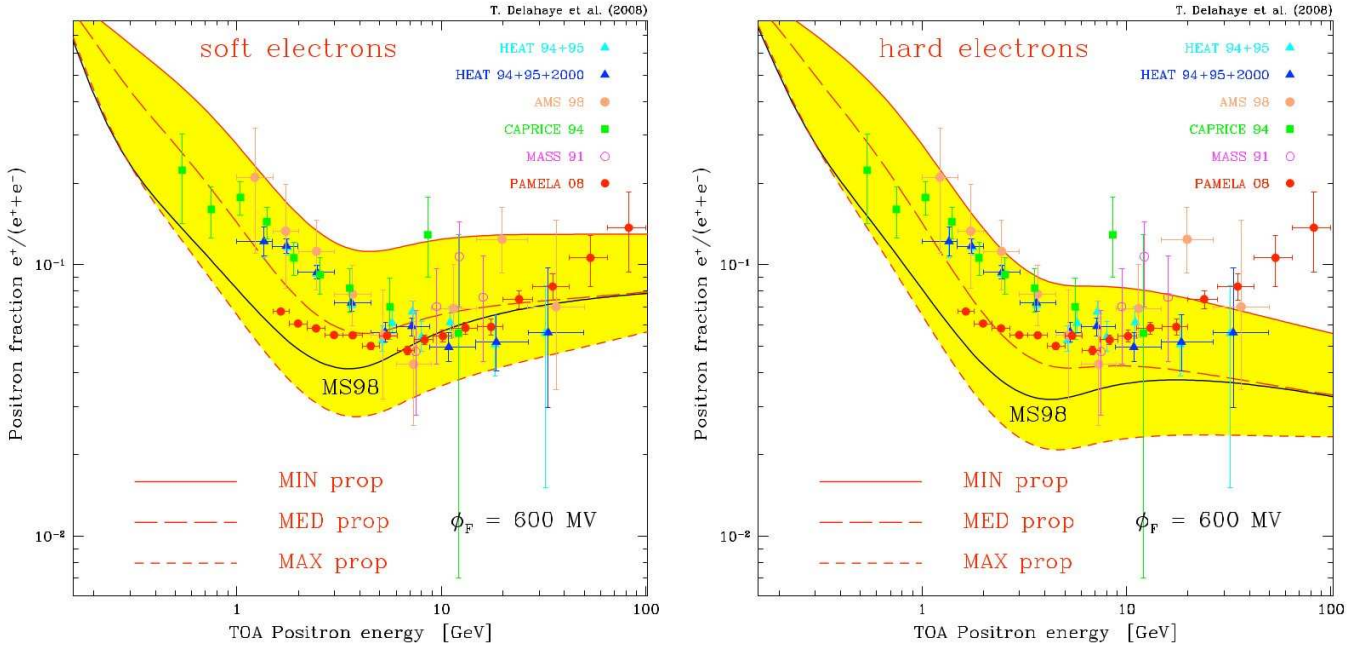


FIGURE 5.5: Erreurs sur les fractions positroniques théoriques. La bande jaune indique la bande d'incertitude due aux paramètres de propagation. La courbe gauche correspond à une extrapolation du flux d'électrons avec un spectre mou, la figure droite avec un spectre dur (Delahaye et al. 2007)

4 LA PHYSIQUE DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION

On décortique ici le comportement des solutions de l'équation de diffusion. Pour cela nous allons nous pencher sur chaque terme des solutions pour bien comprendre la physique sous-jacente avant de poursuivre notre étude. Dans tous les modèles, la présence du vent convectif fait apparaître une décroissance exponentielle du flux en $\exp(-V_c Z/2D)$. L'effet physique se comprend assez bien, le vent étant choisi le long de l'axe z de la galaxie, la matière est éjectée vers les bords verticaux du halo magnétique, jusqu'à être éjectée du halo magnétique. Les rayons cosmiques ne sont alors plus confinés dans la galaxie et s'échappent, ce qui explique la diminution du flux.

Toutes ces solutions font apparaître les coefficients $D/h\Gamma$ et D/V_c . Ces coefficients sont homogènes à des longueurs, ils traduisent la compétition entre plusieurs phénomènes physiques. Les spallations et la diffusion pour le premier, le vent galactique et la diffusion pour le deuxième. L'étude de ces coefficients nous permet de déterminer des domaines énergétiques pour lesquels certains de ces phénomènes peuvent être négligés. La figure 5.6 illustre les distances caractéristiques associées à ces phénomènes pour les modèles de propagation min, med et max. Chacune de ces distances est interprétée comme étant la distance à partir de laquelle un phénomène physique donné (convection ou

spallation) commence à être efficace par rapport à la diffusion. Dans les trois cas, on peut voir qu'au-delà de la centaine de GeV, la distance avoisine au moins les 10 kpc. De plus, dans les équations, ces distances sont toujours mises en regard de la taille du halo L . Il apparaît donc des rapports du type $V_c L/D$. Plus les distances caractéristiques sont grandes et plus les termes de cette forme sont atténués. C'est en fait un point extrêmement important. La présence d'un bord de libre échappement en L fait disparaître tous les phénomènes physiques, ce qui est normal puisqu'à partir de cette distance les particules s'échappent. La hauteur du halo L est donc la taille importante du système. Dans les paramètres dérivés par les observations sur le B/C les halo L sont de quelques parsecs (ou au maximum quelques dizaines de kiloparsecs pour le modèle max), ce qui veut dire que les processus physiques nous intéressant ont des échelles de taille caractéristique inférieure à quelques parsec. Le rayon de la galaxie R étant estimé à 20 kpc, il est toujours supérieur à la taille du halo L dans nos modèles. Ce qui confirme qu'il est possible de le négliger pour la résolution des équations de propagation.

Concluons cette discussion en rappelant les deux informations importantes : la hauteur du halo diffusif dicte le libre échappement et définit l'étendue spatiale des phénomènes auxquels nous sommes sensibles. Au-delà de quelques centaines de GeV la propagation est purement diffusive, on peut donc dans ces régimes négliger directement les spallations et le vent convectif.

Dans le cadre du modèle de la myriade, il est plus subtil de détecter le comportement radial de l'équation, nous y reviendrons dans le paragraphe suivant. Dans le cadre du modèle stationnaire, le comportement radial est porté par les fonctions de Bessel et le terme source sous forme d'une somme. Nous avons vu que les fonctions de Bessel d'ordre zéro sont en fait des vecteurs de base pour décomposer des fonctions à symétrie cylindrique, ce qui est le cas du terme source. On suppose donc, que la présence dans la solution d'une somme du type

$$\sum_i f_i \tilde{q}_i J_0(\zeta_i r/R).$$

confère à l'aspect radial de la solution le même comportement que le terme source. Cependant il faut combiner ce comportement avec l'échappement radial inséré dans notre résolution $N(z, r = R) = 0$. De ce fait on s'attend à ce que la partie radiale de la solution suive la forme du terme source avec une atténuation lorsqu'on se rapproche de $r = R$. Cette atténuation n'étant pas présente dans le cadre de sources ponctuelles on peut prédire que la partie radiale de la solution suivra le terme source de près.

Regardons maintenant la solution de l'équation de diffusion pour une source ponctuelle pour différents âges et différentes distances de la source. L'effet de la hauteur du halo diffusif, en lien avec le libre échappement, vient d'être discuté. Le système physique ne change ici pas radicalement, seule la source est modifiée, l'effet de la hauteur du halo est donc le même que précédemment : il existe une longueur caractéristique L qui définit une zone à partir de laquelle les cosmiques ont une faible probabilité d'arriver jusqu'à nous.

D'autre part, la solution dans le cadre du modèle de la myriade est une solution du type "Heat

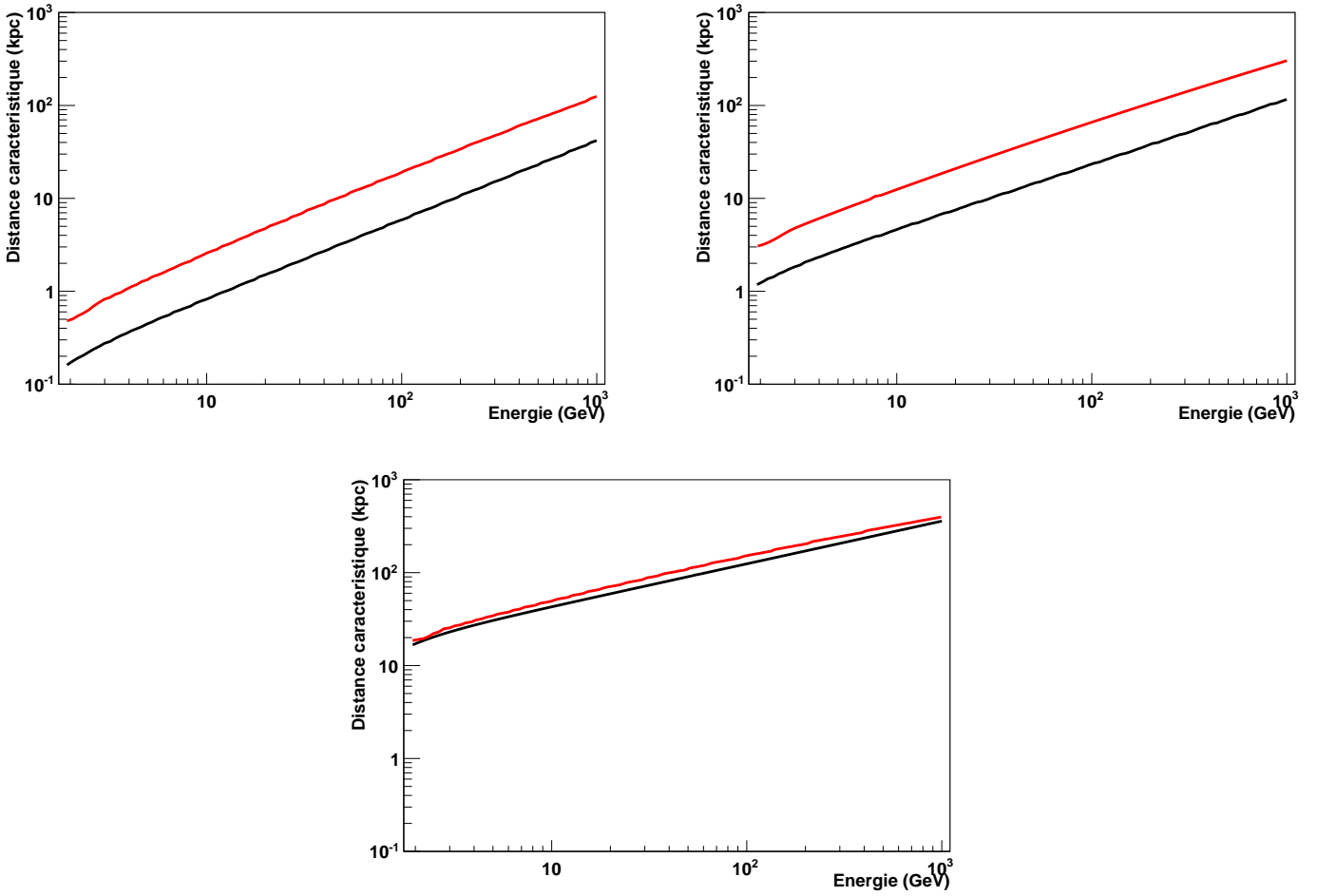


FIGURE 5.6: Distances caractéristiques des processus vis-à-vis de la diffusion. En noir la convection et en rouge la spallation. Les distances sont calculées pour les modèles min (en haut à gauche), med (en haut à droite) et max (en bas).

Kernel", c'est-à-dire une solution classique du modèle de diffusion, à laquelle se sont greffés les effets de libre échappement, de vent convectif, et de spallation. Pour regarder le comportement de ces solutions on se contentera d'étudier une solution du type "Heat Kernel" en 1D. On rappelle qu'une telle solution est donnée par

$$N_{HK} = \frac{100}{\sqrt{4\pi D(t-t_s)}} e^{-\frac{r^2}{4D(t-t_s)}} \quad (5.6)$$

Ici le facteur 100 est introduit pour parler en pourcentage, l'intégrale de cette fonction sur l'espace pour un temps donné vaut 100. Nous traçons cette fonction pour quatre énergies différentes : 100 GeV, 1 TeV, 10 TeV et 100 TeV. Le résultat est montré sur la figure 5.7. On peut d'ores et déjà voir qu'aux faibles énergies on est assez peu sensibles aux sources proches au-delà de quelques kpc. Par

exemple à 100 GeV on reçoit moins d'un pourcent des sources d'âges allant jusqu'à 100 Myr. En effet les cosmiques de ces sources n'ont pas eu le temps de diffuser jusqu'à nous. À 10 TeV par contre, le coefficient de diffusion étant plus élevé, nous sommes beaucoup plus sensibles aux sources jeunes et relativement proches. Au-delà, ce sont surtout les sources jeunes quelle que soit leur distance qui contribuent au flux.

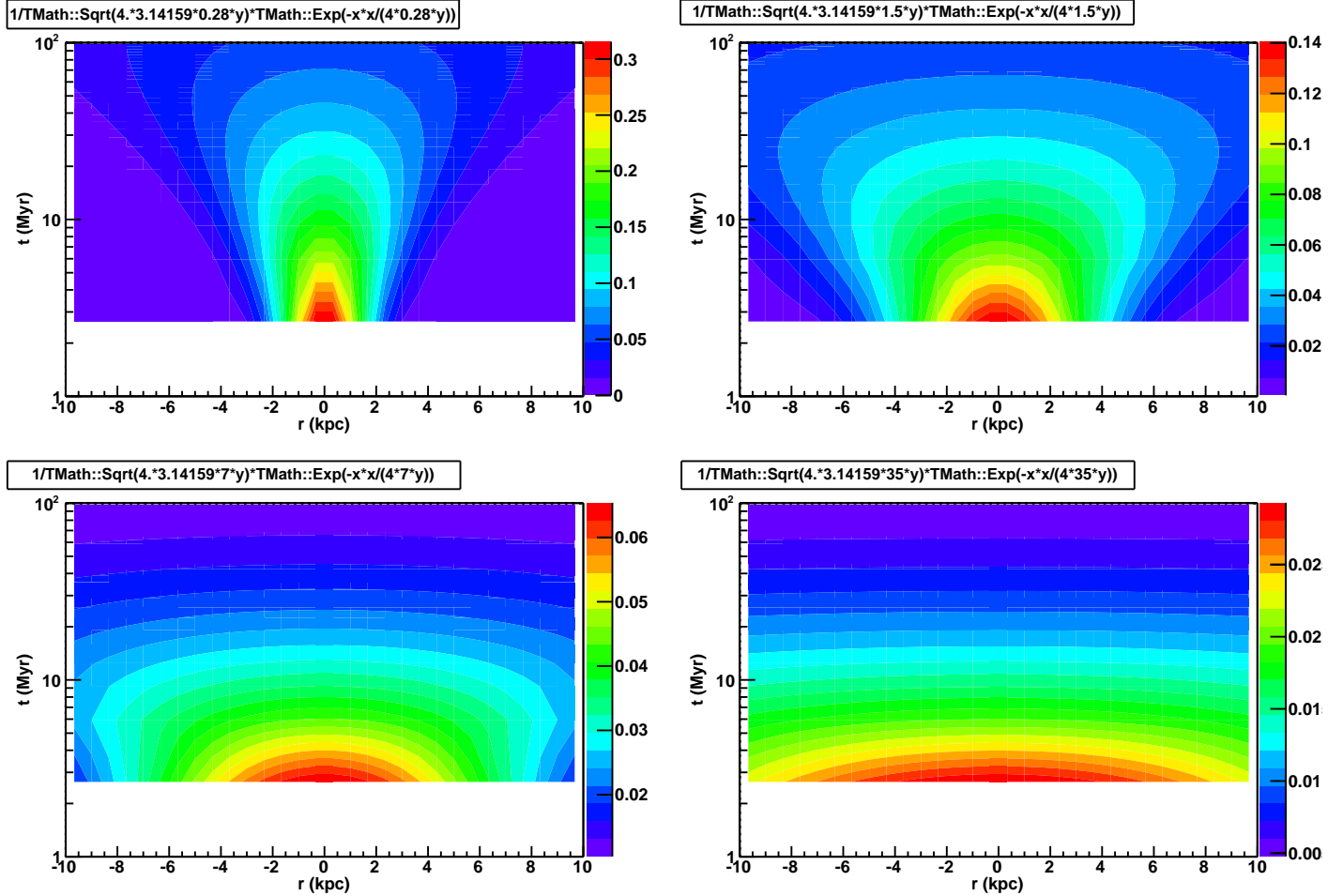


FIGURE 5.7: Solution de type Heat Kernel en 1D à 100 GeV (haut gauche), 1 TeV (haut droite), 10 TeV (bas gauche), 100 TeV (bas droite).

Il ne faut pas relier directement les flux mesurés sur Terre avec ces figures, car nous ne sommes pas sensibles à une seule source mais à un ensemble de sources réparties suivant des distributions particulières. L'étude de ces flux sera le thème de la partie 2 de cette thèse. La représentation à 100 TeV fait émerger un problème pour les solutions de cette équation : plus l'énergie augmente et plus on reçoit de rayons cosmiques des sources jeunes. Considérons à 10^3 TeV une source de 1000 ans située à 1 kpc. On se place dans le cas extrême pour lequel nous sommes sensibles aux sources très jeunes. Le calcul de (5.6) avec un coefficient de diffusion "med" donne un résultat de l'ordre de 2% qui n'est

pas négligeable. Or pour parcourir 1 kpc la lumière met environ 3000 ans à nous parvenir, ce qui veut dire que les particules reçues de la source sont supra-luminiques. On est donc dans une situation non physique. En fait cela vient de la construction non relativiste de notre équation, il faudrait une équation admettant une vitesse de propagation finie de nos particules. C'est une situation non physique qui émerge du fait que dans sa construction la théorie n'est en fait pas vraiment relativiste, elle ne prend pas en compte de vitesse de propagation finie des particules. Pour régulariser ce problème nous avons plusieurs solutions : nous pouvons introduire directement une coupure pour éteindre complètement les flux supraluminiques. Le profil du flux sera alors brisé, il est donc susceptible de faire apparaître des irrégularités dans le spectre. Ou alors on peut essayer de travailler sur d'autres équations. Citons par exemple les tentatives de traitement relativiste de l'équation de diffusion ([Ali & Zhang 2005](#)). La théorie RHC (pour "relativist heat conduction"), propose un tel traitement, avec une équation de diffusion de la forme

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{D}{C^2} \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + D\Delta N \quad (5.7)$$

Ce modèle est difficile à interpréter et à mettre en place. Il fait apparaître une constante C liée à la vitesse du son mais qui joue le même rôle que la vitesse de la lumière en relativité. De plus, du point de vue des calculs, cette équation serait particulièrement délicate à résoudre avec la géométrie de la galaxie. Nous nous contenterons donc de garder à l'esprit qu'une erreur dans les solutions peut subsister à haute énergie. Cette erreur sera de faible importance car nous finirons par travailler sur un modèle très peu sensible dans lequel les sources jeunes que nous considérerons seront situées très loin de nous, leur flux sera par conséquent très atténué par l'échappement vertical. Nous garderons toutes ces approximations et les comportements du propageur à l'esprit pour le traitement futur des solutions de l'équation de propagation. Nous entrons maintenant dans le vif du sujet et attaquons des problématiques plus modernes

RÉFÉRENCES

- Adriani, O., Barbarino, G. C., Bazilevskaya, G. A., et al. 2013, PL, 111
- Aguilar, M., Alberti, G., Alpat, B., et al. 2013, PRL, 110
- Ali, Y. & Zhang, L. 2005, International Journal of Heat and Mass Transfer, 48, 2397
- Coste, B., Derome, L., Maurin, D., & Putze, A. 2011, A&A, 539
- Das, M. & Mohanty, S. 2013, ArXiv e-prints, 1306.4505D, 4505
- Delahaye, T., Lavalle, J., Lineros, R., Donato, F., & Fornengo, N. 2010, A&A, 524, 51
- Delahaye, T., Lineros, R., Donato, F., Fornengo, N., & Salati, P. 2007, PRD, 77
- Engelmann, J. J., Ferrando, P., Soutoul, A., Goret, P., & Juliusson, E. 1990, A&A, 233, 96
- Lavalle, J. 2010, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 414, 985L
- Linden, T. & Profumo, S. 2013, ApJ, 772, 18
- Maurin, D. 2011, in crpa Conference
- Maurin, D., Donato, F., Taillet, R., & Salati, P. 2001, ApJ, 555, 585
- Maurin, D., Taillet, R., & Donato, F. 2002, A&A, 394, 1039
- Nakamura, K. & Group, P. D. 2010, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys., 37
- Putze, A., Derome, L., & Maurin, D. 2010, A&A, 516, A66
- Taillet, R. 2010, PhD thesis
- Yin, P.-F., Yu, Z.-H., Yuan, Q., & Bi, X.-J. 2013, PRD, 88, 23001

DEUXIÈME PARTIE :



LES FLUX DE PROTONS ET D'HÉLIUMS

INTRODUCTION

Le flux de rayonnement cosmique entre le GeV et quelques centaines de TeV, a pendant longtemps été modélisé par une simple loi de puissance. Nous avons vu que, de par leur construction, les modèles de propagation offraient une description correcte de ce flux en loi de puissance. Cependant, les mesures récentes de flux de protons et d'héliums par CREAM et PAMELA (Yoon et al. 2011; Adriani et al. 2011) reportent que l'hypothèse d'une simple loi de puissance dans cette zone est rejetée à 95%. Le spectre se durcit à 232 ± 30 GeV pour les protons et à 243 ± 30 GeV/nuc pour l'hélium. Ces brisures de pentes indiquent la présence d'un excès de protons et de noyaux d'hélium dans le flux du rayonnement cosmique au-delà de 250 GeV/nuc. L'indice spectral du flux de protons, qui caractérise la pente de la courbe, varie alors de $2.85 \pm 0.015 \pm 0.004$ à $2.67 \pm 0.03 \pm 0.05$. Pour les données en hélium il varie de $2.766 \pm 0.01 \pm 0.027$ à $2.447 \pm 0.06 \pm 0.03$.

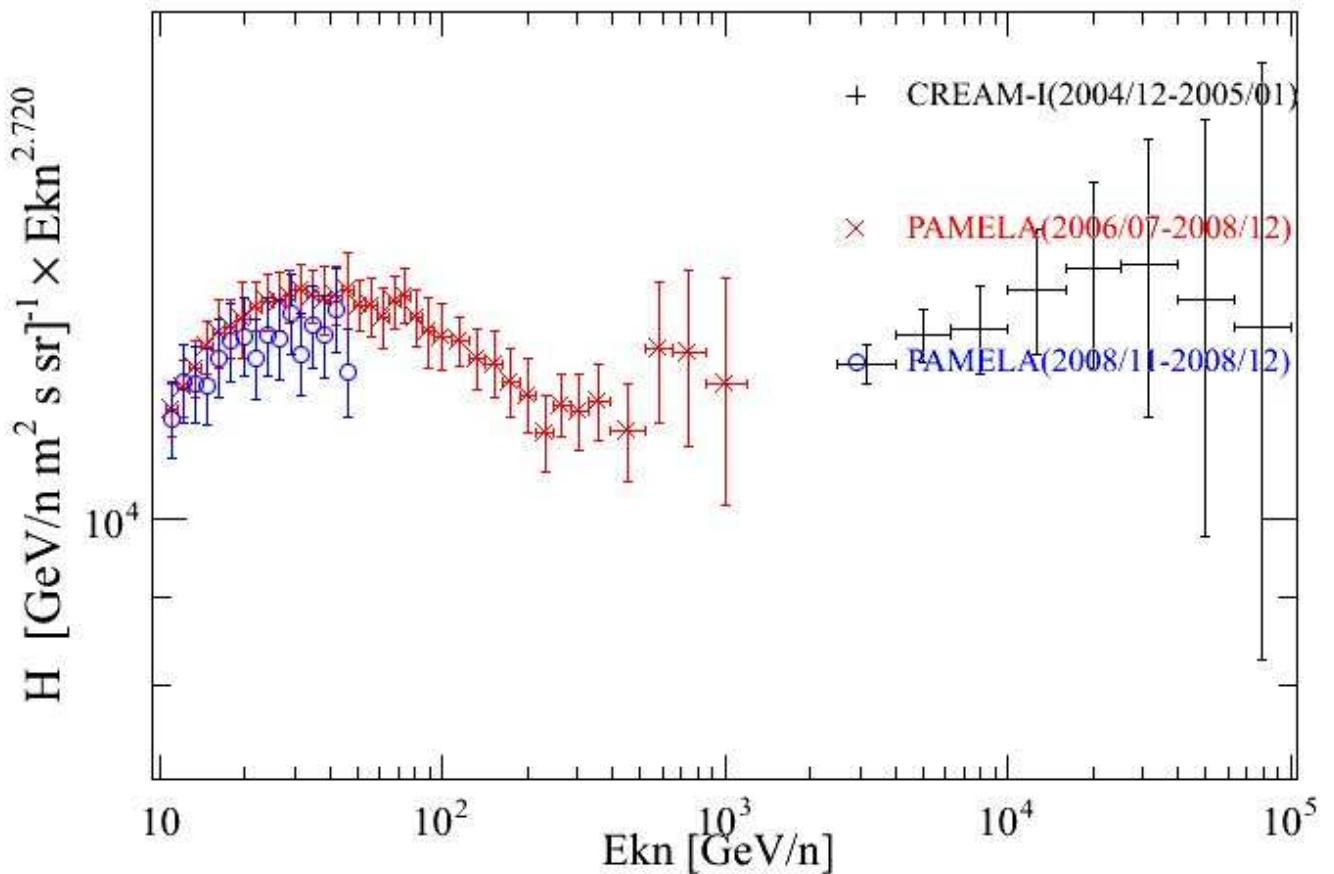


FIGURE 5.8: Spectre de protons cosmiques à haute énergie provenant des expériences CREAM et PAMELA (Maurin et al. 2013)

LES DIFFÉRENTES EXPLICATIONS

Nous avons vu dans la section 2 (page 143) que la pente du spectre de rayons cosmiques à haute énergie est proportionnelle à $\alpha + \delta$, qui sont respectivement les pentes du coefficient de diffusion et du terme d'injection en énergie. Le plus simple pour introduire une brisure de pente est donc d'introduire une cassure dans un de ces spectres et donc une discontinuité dans l'un ou l'autre de ces coefficients. Une brisure du terme α pourrait provenir d'une modification des méthodes conventionnelles d'accélération telle que nous l'avons abordé dans la section 2 (page 39), c'est ce que suggère par exemple (Malkov et al. 2012). De la même façon, la possibilité de plusieurs classes d'accélérateurs de rayons cosmiques est évoquée. Par exemple (Stanev et al. 1993; Zatsepin & Sokolskaya 2006) suggèrent une différence d'accélération entre les supernovæ du milieu interstellaire et les supernovæ présentes dans des vents stellaires. Plus particulièrement, celles localisées dans les vents magnétiques des étoiles Wolf-Rayet et des supergéantes rouges accélèrent les rayons cosmiques avec un spectre qui pourrait avoir deux composantes : la composante normale de l'accélération par les supernovæ plus une composante dure issue des cercles polaires de ces étoiles. Selon (Biermann et al. 2010), cette composante prendrait le pas sur la composante molle au-dessus de quelques centaines de GeV, ce qui expliquerait la brisure dans le spectre.

La modification spectrale du coefficient de diffusion proposée par (Ave et al. 2009) pourrait provenir d'une décroissance de l'indice δ inattendue à haute énergie. Récemment, (Blasi et al. 2012) ont donné des pistes théoriques pour étudier cette possible décroissance. L'argument proposé est que pour des énergies inférieures à 200 GeV la turbulence est générée dans le plasma par les rayons cosmiques eux-mêmes, au-delà de cette énergie les rayons cosmiques deviennent sensibles à des turbulences produites par des événements extérieurs, comme les superbulles.

Dans cette thèse nous proposons une approche sans brisure directe de l'indice spectral. Nous étudierons dans un premier temps la possibilité d'une variation du flux issue simplement d'une fluctuation statistique due à une répartition particulière des sources. En effet, si, dans le cadre du modèle de la Myriade, on considère ces sources comme étant ponctuelles, pour obtenir la valeur moyenne du flux, il faut sommer les contributions de toutes les réalisations possibles de ces sources. Le flux devient alors une variable aléatoire. L'évocation d'une possible fluctuation est alors directement en lien avec l'écart-type de cette variable aléatoire. Cette hypothèse a déjà été émise par (Higdon & Lingenfelter 2003), qui évoquait une variation de flux due à une seule source. Nous allons voir que le calcul de l'écart type est particulièrement délicat car celui-ci ne peut pas se faire dans le cadre classique du théorème central limite. Une étude statistique détaillée montre que la probabilité pour qu'une variation dans la distribution de sources crée la brisure de pente attendue est extrêmement faible. Nous étudierons alors le cas où le taux d'explosion de supernovæ dans la galaxie, qui est associé au taux d'apparition de nouvelles supernovæ dans la galaxie, possède une légère dispersion. Nous verrons que cette dispersion est motivée par les différentes observations de supernovæ locales.

Dans ce chapitre nous reprenons l'étude de la section 3 (page 128) plus en détails. Dans un premier temps, nous calculerons la valeur moyenne du flux, soit le moment d'ordre 1 de la distribution de probabilité, pour vérifier que cette valeur moyenne converge bien vers les théories stationnaires du rayonnement cosmique. Pour réaliser ce calcul il nous faut connaître la distribution spatiale de sources. Nous nous référerons donc à la section 2.2 (page 45). Ces calculs sont propres au propagateur et ne sont pas inhérents au flux de protons lui-même, ils peuvent donc être repris pour l'étude de plusieurs espèces (notamment l'hélium).

Le calcul du moment d'ordre 2 de la distribution de probabilité se révèle plus problématique, en effet, ce moment diverge. La classe de distribution statistique engendrant de tels problèmes est connue comme étant la classe des distributions stables avec des queues lourdes. Cette divergence nous empêche d'utiliser la définition classique de la variance, et par extension nous empêche d'utiliser le théorème central limite lorsqu'on considère un très grand nombre de sources. La première mise en évidence passe par le calcul de $\langle \mathcal{G}^2 \rangle$ dans le cadre d'une distribution de sources homogène.

Enfin, rappelons que dans tout ce chapitre le flux qui nous intéresse est pris au niveau du Système solaire, et donc en $z = 0$.

1 DISTRIBUTION HOMOGENE DE SOURCES

Pour mettre en évidence de manière explicite le comportement de la moyenne et de la variance, on considérera en premier lieu une distribution uniforme de sources bornée. À priori une quelconque divergence qui apparaîtrait ne serait pas due à la distribution de sources (à condition de choisir celle-ci continue). On postule également que l'énergie est suffisamment élevée pour que l'on soit en régime purement diffusif. Cette démarche sera utilisée fréquemment dans ce chapitre et présente un gros avantage pour l'interprétation des résultats. Dans ce cadre, les calculs peuvent presque tous être menés analytiquement. Les résultats obtenus avec une distribution de sources uniforme sont valables dans une zone très locale autour du Système solaire à condition qu'elle soit suffisamment petite devant les variations du terme source. En supposant le disque galactique de rayon R_{\max} et l'âge maximal des sources t_{\max} , la distribution spatiale et temporelle est donnée par :

$$f_r(r)f_t(t)f_z(z) = \frac{1}{\pi(R_{\max}^2 - R_{\min}^2)(t_{\max} - t_{\min})}\delta(z)$$

De sorte que la distribution soit normée à 1.

Le flux moyen pour une source ponctuelle, prise dans un ensemble statistique de sources, située spatialement entre R_{\min} et R_{\max} et avec des âges compris entre t_{\min} et t_{\max} est obtenue en moyennant $\mathcal{G}_1 \equiv \mathcal{G}_p$ sur les âges et distances.

Dans un premier temps on considère ces sources réparties uniformément dans l'espace et le temps dans le disque galactique supposé infiniment mince. Les effets de diffusion assurent qu'on ne recevra pas de flux provenant de sources très éloignées. En effet en section 4 (page 151) l'étude des solutions de l'équation de diffusion pour des sources ponctuelles nous a montré qu'à une distance suffisamment grande le flux de particules est quasiment éteint à cause de l'échappement par les bords en $z = \pm L$. On peut donc faire tendre R_{\max} vers l'infini, sans que le flux n'en soit affecté. La moyenne du propagateur est obtenue en moyennant (4.161) sur les distributions continues que nous venons de mentionner. On a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_1 \rangle = \langle \mathcal{G}_p \rangle &= \frac{1}{\pi R_{\max}^2 t_{\max}} \int_0^{R_{\max}} 2\pi r dr \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{d\tau}{4\pi DL\tau} e^{-r^2/4D\tau} \\ &\times \sum_n e^{-k_n^2 D\tau} \int_{-L}^L e^{-V_c|z|/(2D)} \frac{1}{C_n} \sin(k_n L) \sin(k_n (L - |z|)) \delta(z) dz \end{aligned}$$

L'encadré suivant détaille le calcul de cette valeur moyenne

Calcul du flux moyen pour une distribution de sources uniforme

La partie antisymétrique du propagateur étant nulle en $z = 0$, on ne prend pas la peine de l'écrire ici. Quand on ne tient compte ni des spallations ni du vent galactique, la prescription de régime purement diffusif implique, $C_n = L$. Le facteur 2π apparaît directement pour éviter d'écrire l'intégration sur l'angle θ . Avec ν sources par unité de temps et de surface dans le disque. Chaque source étant supposée indépendante, le flux moyen provenant de $N = \nu\pi R_{\max}^2 t_{\max}$ sources est donné par :

$$\langle \mathcal{G}_N \rangle = N \langle \mathcal{G}_1 \rangle = \frac{\nu}{4\pi DL} \int_0^{R_{\max}} 2\pi r dr \int_0^{t_{\max}} \frac{d\tau}{\tau} e^{-r^2/4D\tau} \sum_n e^{-k_n^2 D\tau}$$

En intégrant sur le temps ($t_{\max} \rightarrow \infty$) et en utilisant (Gradshteyn et al. 2007)

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\beta/x-\gamma x} dx = 2 \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{\beta\gamma}) \quad , \quad (6.1)$$

Avec K_ν l'ordre ν des fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce, on trouve

$$\langle \mathcal{G}_N \rangle = \nu \int_0^{R_{\max}} 2\pi r \mathcal{G}_{\text{steady}}(r) dr$$

avec $\mathcal{G}_{\text{steady}}$ le propagateur stationnaire d'une source ponctuelle donnée que nous avons défini comme

$$\mathcal{G}_{\text{steady}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_S) \equiv \frac{1}{2\pi DL} \sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(r \sqrt{\alpha_n/D}\right). \quad (6.2)$$

En utilisant $\int x K_0(x) dx = -x K_1(x)$, et $\alpha_n = D k_n^2 = D(n - 1/2)^2 \pi^2$ on a

$$\langle \mathcal{G}_N \rangle = \frac{\nu}{D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)\pi} \left\{ R_{\min} K_1\left(\frac{2m+1}{2} \frac{\pi R_{\min}}{L}\right) - R_{\max} K_1\left(\frac{2m+1}{2} \frac{\pi R_{\max}}{L}\right) \right\}$$

Avec $m = n - 1$. Pour un disque infini, $R_{\min} = 0$ et $R_{\max} \rightarrow \infty$, de sorte que, en utilisant $x K_1(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} K_1(x) = 0$

$$\langle \mathcal{G}_N \rangle = \frac{\nu L}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} \right)^2$$

On peut montrer que $\sum_n 1/(n + 1/2)^2 = \pi^2/2$, et finalement, pour le disque infini :

$$\langle \mathcal{G}_N \rangle = \frac{\nu L}{2D}$$

La moyenne du propagateur pour N sources distribuées uniformément dans l'espace et le temps est donc donnée par

$$\langle \mathcal{G}_N \rangle = \frac{\nu L}{2D} \quad (6.3)$$

En résolvant l'équation de diffusion stationnaire avec rigoureusement les mêmes prescriptions on peut retrouver un résultat en tout point identique. Donc, la valeur moyenne d'un flux de sources ponctuelles réparties uniformément est égale au flux stationnaire obtenu avec une distribution continue de sources à l'intérieur d'un disque infiniment mince. Ce résultat a l'avantage d'être simple d'interprétation. En effet, lorsque la hauteur L du halo diffusif augmente, alors le flux reçu peut provenir de sources plus lointaines, qui ne seront pas atténuées à cause des effets d'échappement vertical, le flux moyen a

donc tendance à augmenter. À contrario, une augmentation du coefficient de diffusion D signifie une trajectoire plus rectiligne des particules, favorisant l'effet d'échappement vertical. Enfin, ν le taux d'explosion de supernovæ dans la galaxie, est directement relié au nombre de sources. Plus il est élevé, plus la densité de sources est élevée et plus le flux est élevé. On remarque que le rayon R de la galaxie n'intervient pas, et donc on ne voit pas apparaître d'effet d'échappement radial. Cet effet vient de la construction de la solution de l'équation dans le modèle de la myriade. Le soleil étant situé suffisamment loin des bords radiaux de la galaxie par rapport à l'épaisseur du halo, on considère que tous les effets qui peuvent apparaître provenant des bords radiaux de la galaxie sont atténués par l'échappement en z .

La convergence de la valeur moyenne avec le modèle stationnaire se généralise à des situations plus complexes, avec du vent, des spallations, etc. Nous la vérifierons alors plutôt de manière numérique.

2 DISTRIBUTION RÉALISTE DE SOURCES

On considère maintenant le cas plus général d'une distribution donnée de sources dans la galaxie. Cette distribution est séparée en une distribution radiale et une distribution le long de l'épaisseur du disque. Comme discuté précédemment, on choisit une distribution spatiale qui suit celle des pulsars, connus pour être des traceurs de vestiges de supernovæ. On choisit la distribution de Yusifov et Küçük donné dans la section 2.2 (page 45),

$$f_r(r_s) = \left(\frac{r_s + 0.55}{8.5 + 0.55} \right)^{1.64} \exp \left\{ -4.01 \left(\frac{r_s - 8.5}{8.5 + 0.55} \right) \right\}$$

avec les distances en kpc. La distribution le long de l'axe z est donnée par

$$f_s(z_s) = \exp \left(-\frac{|z_s|}{z_0} \right)$$

avec z_0 fixé comme étant la demi-hauteur du disque de matière galactique, $z_0 = h$. Dans cette section, z_s , r_s , θ_s et t_s indiquent la position et l'âge de la source. Le Système solaire, quant à lui, est situé en $r_\odot = 8.5$ kpc, $\theta = 0$ et $z = 0$. On définit également $\rho(r_s, \theta_s)$ comme étant la distance radiale en coordonnées cylindriques entre une source et le Système solaire

$$\rho(r_s, \theta_s) = \sqrt{(r_\odot - r_s \cos \theta_s)^2 + r_s^2 \sin^2 \theta_s}$$

On considère les sources comme indépendantes les unes des autres, de sorte que la valeur moyenne du propagateur donnée par les N sources soit donnée par

$$\langle \mathcal{G}_N \rangle = N \times \langle \mathcal{G}_1 \rangle = NA \int r_s dr_s \int d\theta_s \int dz_s \int dt_s f_\theta(\theta) f_r(r_s) f_z(z_s) f_t(t_s) \mathcal{G}_N(r_s, \theta_s, t_s)$$

En considérant une symétrie cylindrique et une distribution uniforme d'âge jusqu'à un âge maximum fixé à T_{\max} , le facteur de normalisation A est donné par l'intégrale des distributions statistiques du système

$$\frac{1}{A} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{T_{\max}} dt \int_{Galaxy} r f_r(r) f_z(z) dr dz = 2\pi T_{\max} \int_{Galaxy} r f_r(r) f_z(z) dr dz$$

Calcul du flux moyen pour une distribution réaliste

On obtient (la partie antisymétrique du propagateur s'annule en $z = 0$)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_N \rangle &= N \int r_s dr_s dz_s dt_s d\theta_s A f_r(r_s) \exp\left(-\frac{|z_s|}{z_0}\right) \left(\frac{1}{4\pi D t_s}\right) \exp\left(-\frac{V_c |z_s|}{2D}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2(r_s, \theta_s)}{4D t_s}\right) \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-(\alpha_n) t_s)}{C_n} \sin(k_n L) \sin(k_n (L - |z_s|)) \end{aligned} \quad (6.4)$$

On sépare l'intégration et on définit :

$$\langle B_z \rangle_n \equiv \frac{\sin(k_n L)}{C_n} \int_{-L}^L \exp\left(-\frac{|z_s|}{z_0}\right) \exp\left(-\frac{V_c |z_s|}{2D}\right) \sin(k_n (L - |z_s|)) \quad (6.5)$$

L'intégration se fait en considérant la forme exponentielle des fonctions trigonométriques :

$$\langle B_z \rangle_n = \frac{\sin(k_n L)}{C_n} \frac{2}{(V_c/2D + 1/h)^2 + k_n^2} \left(\left(\frac{V_c}{2D} + \frac{1}{h} \right) \sin(k_n L) - k_n \left(\cos(k_n L) - e^{-L(\frac{V_c}{2D} + \frac{1}{h})} \right) \right) \quad (6.6)$$

Pour l'intégration sur le temps, on considère qu'au bout d'un certain temps T_{\max} suffisamment grand, les sources ne contribuent plus au flux. Dans ce cas, on peut calculer l'intégrale en choisissant la borne $T_{\max} \rightarrow \infty$ en étant sûr de conserver la convergence de l'intégrale. On utilise (6.1)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi D t_s} \exp\left(-\frac{\rho^2(r_s, \theta_s)}{4D t_s}\right) \exp(-\alpha_n t_s) dt_s = \frac{1}{2D\pi} K_0\left(\rho(r_s, \theta_s) \sqrt{\frac{\alpha_n}{D}}\right) \quad (6.7)$$

On peut alors écrire la valeur moyenne comme :

$$\langle \mathcal{G}_N \rangle = N \frac{A}{2D\pi} \int dr_s d\theta_s r_s f_r(r_s) f_\theta(\theta_s) \sum_n K_0 \left(\rho(r_s, t_s) \sqrt{\frac{\alpha_n}{D}} \right) \langle J_z \rangle_n \quad (6.8)$$

On intégrera ensuite ce résultat numériquement le long des deux coordonnées r_s and θ_s . Le flux moyen est alors donné par

$$\langle \Phi \rangle = \langle \mathcal{G}_N \rangle \frac{v}{4\pi} Q(E)$$

Avec $Q(E)$ le taux d'injection énergétique des sources en protons par GeV. Nous avons vérifié numériquement, pour plusieurs jeux de paramètres, que le flux obtenu dans ce cadre converge bien vers le flux obtenu avec le modèle stationnaire. Les différences sont inférieures à 1%. Ce résultat confirme que le modèle stationnaire correspond au flux moyen du modèle de la myriade. Tout le cœur du problème est alors d'estimer la variance du flux dans le modèle de la myriade pour pouvoir estimer l'efficacité du flux moyen. En effet s'il se trouve que cette variance est grande par rapport au flux moyen, alors le flux stationnaire (utilisé dans les codes de propagation) se trouve noyé dans les erreurs statistique. Les prédictions associées ne seraient alors plus robustes. Nous allons donc maintenant travailler sur le calcul de la variance du flux pour éclairer ce point.

RÉFÉRENCES

- Adriani, O., Barbarino, G. C., Bazilevskaya, G. A., et al. 2011, *Science*, 332, 69
- Ave, M., Boyle, P. J., Höppner, C., Marshall, J., & Müller, D. 2009, *ApJ*, 697, 106
- Biermann, P. L., Becker, J. K., Dreyer, J., et al. 2010, *ApJ*, 725, 184
- Blasi, P., Amato, E., & Serpico, P. D. 2012, *PRL*, 109
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Jeffrey, A., & Zwillinger, D. 2007, *Table of Integrals, Series, and Products*
- Higdon, J. C. & Lingenfelter, R. E. 2003, *ApJ*, 582, 330
- Malkov, M. A., Diamond, P. H., & Sagdeev, R. Z. 2012, *Physics of Plasmas*, 19, 2901
- Maurin, D., Melot, F., & Taillet, R. 2013, *ArXiv e-prints*, 1302 :5525
- Stanev, T., Biermann, P. L., & Gaisser, T. K. 1993, *A&A*, 274, 902
- Yoon, Y. S., Ahn, H. S., Allison, P. S., et al. 2011, *ApJ*, 728, 122
- Zatsepin, V. I. & Sokolskaya, N. V. 2006, *A&A*, 458, 1

Le flux obtenu dans le modèle de la myriade, pour un ensemble de sources donné dépend de la position et de l'âge exacts de toutes les sources. Mathématiquement, pour des variables aléatoires continues, la probabilité qu'un tirage au sort donne exactement la valeur moyenne est nulle. Donc la question qu'il faut se poser est de savoir à quel point la valeur réelle du flux peut être différente du flux moyen. La méthode standard en physique pour connaître cet ordre de grandeur est de calculer la déviation standard associée au flux, lui-même considéré comme une variable aléatoire. On définit la variance d'une variable aléatoire G comme étant :

$$VAR(G) = \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2$$

On définit l'écart-type σ , aussi appelé déviation standard comme étant la racine carrée de la variance

$$\sigma = \sqrt{VAR(G)} = \sqrt{\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2}$$

Ces grandeurs ont une importance capitale en probabilités. Pour les distributions classiques, elles quantifient la probabilité d'écart à la valeur moyenne d'une variable aléatoire donnée. Pour évaluer à quel point le flux peut s'écarter de sa valeur moyenne il faut usuellement passer par le calcul de ces valeurs.

1 DISTRIBUTION RÉALISTE DE SOURCES

Dans cette section, nous calculons la variance dans le cadre d'un modèle avec une distribution réaliste de sources. Nous commencerons par montrer que cette variance diverge. La variance du propagateur d'une source est définie par

$$\sigma_1^2 = \langle \mathcal{G}_1^2 \rangle - \langle \mathcal{G}_1 \rangle^2$$

Pour N sources indépendantes il s'agit alors de :

$$\sigma_N^2 = \langle G_N^2 \rangle - \langle G_N \rangle^2 \quad (7.1)$$

et

$$G_N = \sum_{n \text{ sources}} G_n = N G_1 \quad (7.2)$$

car toutes les sources sont identiques donc

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \left\langle \left(\sum_{n \text{ sources}} G_n \right)^2 \right\rangle - N \langle G_1 \rangle^2 \\ &= \left\langle \sum_m \sum_{n=m} G_m G_n + \sum_m \sum_{n \neq m} G_m G_n \right\rangle - N \langle G_1 \rangle^2 \\ &= \left\langle \sum_n G_n^2 \right\rangle + \left\langle \sum_m \sum_{n \neq m} G_m G_n \right\rangle - N \langle G_1 \rangle^2 \\ \sigma_N^2 &= N \langle G_1^2 \rangle - N \langle G_1 \rangle^2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Pour cela on a utilisé le fait que l'on considère les sources comme complètement décorréées, donc $\sum_m \sum_{n \neq m} \langle G_m G_n \rangle = 0$. Et donc :

$$\sigma_N^2 = N \sigma_1^2 \quad (7.4)$$

L'encadré suivant détaille le calcul du moment d'ordre 2 de la distribution.

Calcul de $\langle \mathcal{G}_1^2 \rangle$

On doit d'abord calculer la moyenne de \mathcal{G}_1^2 , donnée par :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_1^2 \rangle &= \int dr_s dz_s dt_s d\theta_s A r_s f_r(r_s) \exp\left(-\frac{|z_s|}{z_0}\right) \left(\frac{1}{4\pi D t_s}\right)^2 \exp\left(-\frac{V_c |z_s|}{D}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2(r_s, \theta_s)}{2D t_s}\right) \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-(\alpha_n + \alpha_m)t_s)}{C_n C_m} \sin(k_n L) \sin(k_m L) \sin(k_n(L - |z_s|)) \sin(k_m(L - |z_s|)) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Pour m et n fixés, on définit :

$$\langle \mathcal{G}_z^2 \rangle_{n,m} \equiv \frac{\sin(k_n L) \sin(k_m L)}{C_n C_m} \int_{-L}^L dz_s \exp\left(-|z_s| \left(\frac{V_c}{D} + \frac{1}{h}\right)\right) \sin(k_n(L - |z_s|)) \sin(k_m(L - |z_s|)) \quad (7.6)$$

qui peut être réécrit

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_z^2 \rangle_{n,m} &= \frac{\sin(k_n L) \sin(k_m L)}{C_n C_m} \int_{-L}^L dz_s \exp\left(-|z_s| \left(\frac{V_c}{D} + \frac{1}{h}\right)\right) \\ &\times \frac{1}{2} (\cos((k_n - k_m)(L - |z_s|)) - \cos((k_n + k_m)(L - |z_s|))) \end{aligned} \quad (7.7)$$

L'intégration nous donne

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_z^2 \rangle_{n,m} &= \frac{\sin(k_n L) \sin(k_m L)}{C_n C_m} \times \\ &\left\{ \frac{\left(\frac{V_c}{D} + \frac{1}{h}\right) (\cos((k_n - k_m)L) - \exp(-L(V_c/D + 1/h))) + (k_n - k_m) \sin((k_n - k_m)L)}{(V_c/D + 1/h)^2 + (k_n - k_m)^2} \right. \\ &\left. - \frac{\left(\frac{V_c}{D} + \frac{1}{h}\right) (\cos((k_n + k_m)L) - \exp(-L(V_c/D + 1/h))) + (k_n + k_m) \sin((k_n + k_m)L)}{(V_c/D + 1/h)^2 + (k_n + k_m)^2} \right\} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Il est possible d'intégrer la distribution temporelle pour obtenir la variance issue de tous les âges

$$\langle \mathcal{G}_1^2 \rangle = A \sum_{n,m} \langle \mathcal{G}_z^2 \rangle_{n,m} \int dt_s dr_s d\theta_s r_s f_r(r_s) \exp(-(\alpha_n + \alpha_m)t_s) \frac{e^{-2\rho^2(r_s, \theta_s)/4Dt_s}}{16\pi^2 D^2 t_s^2} \quad (7.9)$$

En utilisant l'équation (6.1) et en considérant $t_{\max} \rightarrow \infty$, on utilise (Gradshteyn et al. 2007) pour calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty dt_s \left(\frac{1}{4\pi D t_s} \right)^2 e^{-\rho^2/2Dt_s} e^{-(\alpha_n + \alpha_m)t_s} = \sqrt{2(\alpha_n + \alpha_m)D} \frac{1}{8\pi^2 D^2} \frac{1}{\rho} K_1 \left(\rho \sqrt{\frac{2(\alpha_n + \alpha_m)}{D}} \right)$$

La valeur moyenne du moment d'ordre 2 s'exprime donc :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_1^2 \rangle &= A \sum_{n,m} \langle \mathcal{G}_z^2 \rangle_{n,m} \frac{1}{8\pi^2 D^2} \sqrt{2(\alpha_m + \alpha_n)D} \\ &\int_0^{R_{\max}} r_s dr_s \int_0^{2\pi} d\theta_s \frac{1}{\rho(r_s, \theta_s)} K_1 \left(\rho(r_s, \theta_s) \sqrt{2\frac{\alpha_m + \alpha_n}{D}} \right) f_r(r_s) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Nous allons maintenant montrer que cette expression diverge lorsqu'on l'intègre sur tout l'espace.

Mise en évidence de la divergence

On s'intéresse au comportement de cette expression lorsque $r \rightarrow 0$ quand l'argument de la fonction de Bessel $r \sqrt{2(\alpha_m + \alpha_n)/D} \ll 1$, ce qui correspond à un régime purement diffusif (voir (4.163)). On a :

$$K_1(x) \sim \frac{1}{x} \quad \text{soit} \quad K_1\left(r \sqrt{2 \frac{\alpha_m + \alpha_n}{D}}\right) \sim \frac{1}{r \sqrt{2 \frac{\alpha_m + \alpha_n}{D}}} \quad (7.11)$$

L'intégration le long des coordonnées spatiales peut être changée (en considérant qu'elle s'annule en $R_{\max} \rightarrow \infty$ et avec R_{\max} suffisamment grand) en

$$\int_0^{2\pi} d\theta_s \left(\int_0^{R_{\min}} r_s dr_s \frac{1}{r_s} K_1\left(r_s \sqrt{2 \frac{\alpha_m + \alpha_n}{D}}\right) f_r(\rho(r_s, \theta_s)) + \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} dr_s K_1\left(r_s \sqrt{2 \frac{\alpha_m + \alpha_n}{D}}\right) f_r(\rho(r_s, \theta_s)) \right) \quad (7.12)$$

La première partie de l'intégration correspond à une zone très locale, dans laquelle on peut considérer une densité source uniforme ($f_r(\rho(r_s, \theta_s)) = 1$), l'intégration devient alors

$$2\pi \int_0^{R_{\min}} dr_s K_1\left(r_s \sqrt{2 \frac{\alpha_m + \alpha_n}{D}}\right) + \int_0^{2\pi} d\theta_s \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} dr_s K_1\left(r_s \sqrt{2 \frac{\alpha_m + \alpha_n}{D}}\right) f_r(\rho(r_s, \theta_s)) \quad (7.13)$$

De sorte que si on considère $r \ll R_{\min}$, on peut utiliser pour la première partie de l'intégrale, l'identité (7.11) pour obtenir

$$2\pi [\ln r_s]_0^{R_{\min}} \sqrt{\frac{D}{2(\alpha_m + \alpha_n)}} + \int_0^{2\pi} d\theta_s \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} dr_s K_1\left(r_s \sqrt{2 \frac{\alpha_m + \alpha_n}{D}}\right) f_r(\rho(r_s, \theta_s)) \quad (7.14)$$

La première partie diverge quand $r \rightarrow 0$ et ne peut pas être régulée par les autres termes qui sont finis.

Lorsque $R_{\min} \rightarrow 0$ l'intégration présente donc une divergence logarithmique. En conséquence, le moment d'ordre 2 diverge, ce qui conduit directement à une divergence de la variance. L'anomalie apparaît donc dans le calcul du moment d'ordre 2 de la distribution. Nous allons maintenant étudier la gravité de ce problème mais surtout son interprétation physique.

2 LA DIVERGENCE DE LA VARIANCE, EST-CE VRAIMENT UN PROBLÈME ?

La valeur moyenne calculée en prenant $r_s \in [0, 20]$ kpc et $t_s \in [0, \infty]$ correspond à la valeur du flux obtenue dans le modèle stationnaire, couramment utilisé dans les études de propagation. Mais la déviation standard de cette variable aléatoire diverge pour $r_s \rightarrow 0$ et $t_s \rightarrow 0$.

L'écart-type donne une indication sur la dispersion de la variable aléatoire autour de sa valeur moyenne. Un écart-type important est souvent interprété comme si la valeur du flux avait une très grande probabilité d'être très éloignée de sa valeur moyenne. La question importante que soulève le calcul précédent est de savoir si un écart-type infini signifie que le flux a une probabilité extrêmement importante de se trouver loin de sa valeur moyenne.

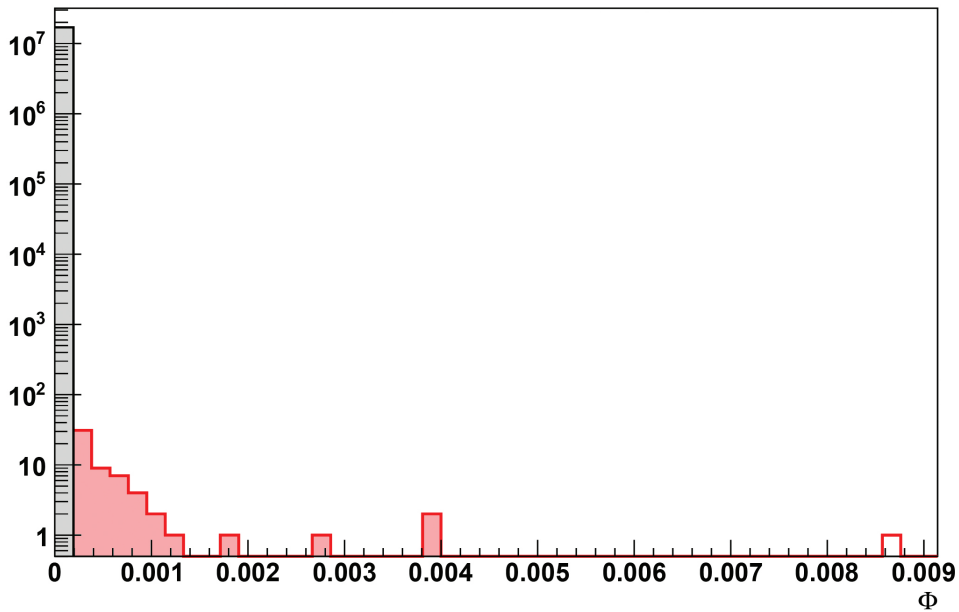


FIGURE 7.1: Histogramme des flux pour 10^9 réalisations de sources, pour le modèle MED.

Sur la figure 7.1 on trace dans le cadre du modèle MED les réalisations de 10^9 tirages aléatoires de sources. On repère en rouge sur l'histogramme, les flux qui sont dûs aux sources qui font diverger la variance, c'est à dire les flux pour lesquels $t_s \rightarrow 0$ et $r_s \rightarrow 0$. Ici, à titre d'illustration, on prend les flux pour lesquels $t < 100$ ans et $r < 100$ pc. On observe que les flux problématiques se trouvent exclusivement dans la queue de distribution de la probabilité. En noir on repère les autres flux, ils sont tous concentrés dans le premier bin de l'histogramme. Cette situation n'est pas inhabituelle en physique, ce sont des événements rares qui font diverger le flux, des événements qui sont donc présents dans la queue de la distribution de probabilité du flux. On s'intéresse donc à cette queue de distribution.

Cependant cette situation reste problématique pour le calcul numérique de la moyenne. En effet sur la figure 7.2, on a indiqué l'évolution de la valeur moyenne et de l'écart-type pour 10^4 réalisations de tirages de sources. Ce que montrent ces courbes c'est que la convergence est très lente à atteindre, ralentissant ainsi toute vérification numérique de nos calculs. Dans l'exemple, au bout de 10^6 tirages, la variance n'a toujours pas convergé.

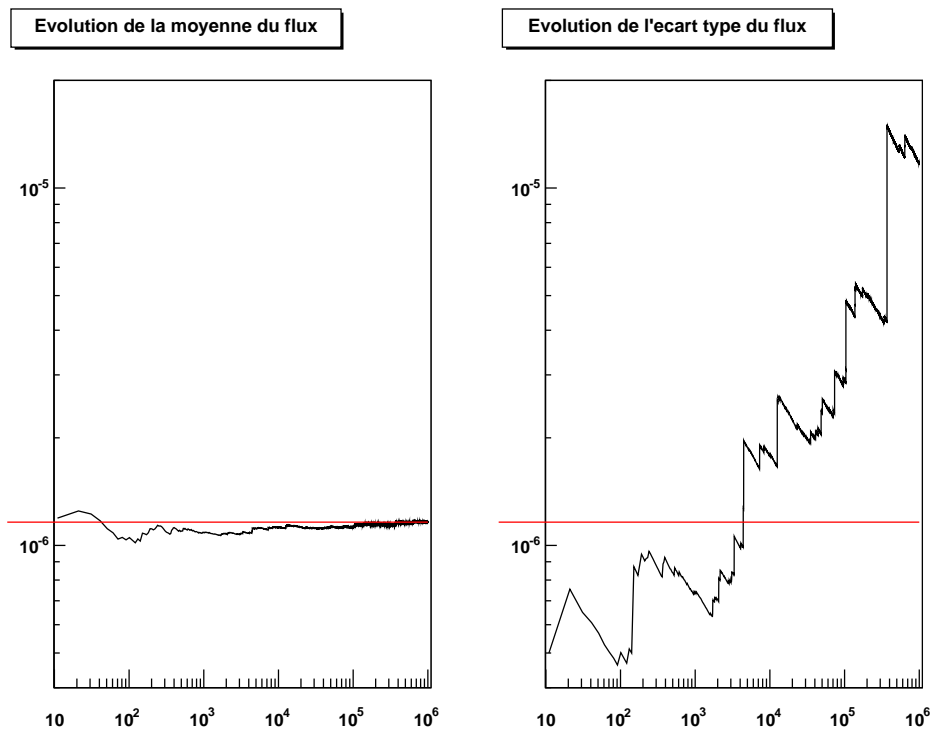


FIGURE 7.2: Évolution de la valeur moyenne et de la variance du flux (en ordonnées) pour 10^6 réalisations de tirages de sources (en abscisses), dans le modèle MED. La ligne rouge indique la valeur moyenne calculée analytiquement.

Toutes ces discussions viennent du fait que dans le modèle de la myriade il existe une probabilité non nulle de trouver des sources arbitrairement proches et jeunes. Nous allons présenter trois méthodes pour régulariser cette variance. Dans un premier temps on étudie l'effet d'une coupure sur la distribution de sources pour retirer la zone problématique. Puis nous nous intéressons au comportement même de la distribution et particulièrement au comportement de ses intervalles de confiance. Pour finir, il s'avère que nous avons des informations sur les sources proches issues des observations. Dans notre galaxie, on peut donc dans nos modèles retirer une région d'espace-temps contenant les sources infiniment proches et jeunes et les remplacer par un catalogue, construit à partir de ces observations.

3 RÉGULARISATION EN UTILISANT UNE COUPURE

Si on regarde le problème en détails, il est évident qu'il n'est pas physiquement pertinent. Il n'existe pas de supernova ni de possibilité de supernova explosant en ce moment dans le Système solaire. On peut donc dans un premier temps vouloir imposer une coupure en temps et en espace fondées sur les observations. Cependant il faut être prudent avec ce choix. En effet, on montre que suivant le choix de cette coupure il est toujours possible d'obtenir une variance forte. Cette dernière est effectivement très sensible au choix de la coupure. On voit par exemple sur la figure 7.3, que choisir des coupures en temps de $t_{\min}/2$ ou $2 \times t_{\min}$ plutôt que t_{\min} a un petit effet sur la moyenne mais un effet important sur la variance.

On envisage différentes prescriptions pour le choix de la coupure. Une première méthode, basée sur la statistique, consiste à ajuster la coupure pour éliminer les événements extrêmement rares qui font diverger la variance mais qui ne contribuent pas significativement au flux moyen, c'est par exemple l'approche adoptée dans (Blasi & Amato 2011) qui choisissent une coupure donnée par $t_{\min} = R_{\max} / \sqrt{4\nu D(E)}$. Cette valeur, englobe les sources qui contribuent à environ 68% du flux dans une région de rayon R_{\max} . Cette coupure indiquée par une flèche sur la figure 7.3 conduit à une valeur moyenne 10% plus petite que la vraie valeur moyenne. Une plus petite coupure donnerait un flux plus précis mais donnerait une variance plus importante. C'est un bon ordre de grandeur mais l'interprétation statistique reste difficile.

Une coupure en temps peut aussi trouver ses motivations dans la physique de l'équation de diffusion elle-même. En effet, comme nous l'avons expliqué dans la section 4 (page 151) pour des petits t_{\min} , l'équation tend à propager des particules plus vite que la vitesse de la lumière. Typiquement pour des énergies de l'ordre de 10^5 GeV on reçoit une partie des particules d'une source de 100 ans de manière supraluminique. Cette coupure peut être choisie fixe en énergie. Les observations de supernovæ voisines nous donnent de bonnes informations sur la distribution de sources jeunes et proches. En utilisant l'âge t_{\min} du plus jeune vestige de supernova connu, on peut construire la limite inférieure en âge. La coupure dépend alors des erreurs de mesure. Cependant, les observations de supernova n'ayant pas la prétention de mesurer toutes les supernova existantes, il est possible que la source choisie pour son plus petit t_{\min} ne soit pas la source la plus jeune.

Pour illustrer le propos, la figure 7.4 présente la valeur moyenne $\langle\phi\rangle$ ainsi que la déviation standard σ_ϕ en utilisant une coupure de $t_{\min} = 100$ yr pour la distribution de sources, et pour le jeu de paramètres MIN. Avec les valeurs choisies pour la coupure, la déviation standard à haute énergie reste de l'ordre de grandeur du flux. On remarque que la valeur relative de l'écart-type, $\sigma_\phi/\langle\phi\rangle$, est indépendante de l'énergie, on le vérifie également par le calcul. Il est possible de le montrer analytiquement pour des sources situées dans un disque mince, dans un modèle purement diffusif. On obtient alors

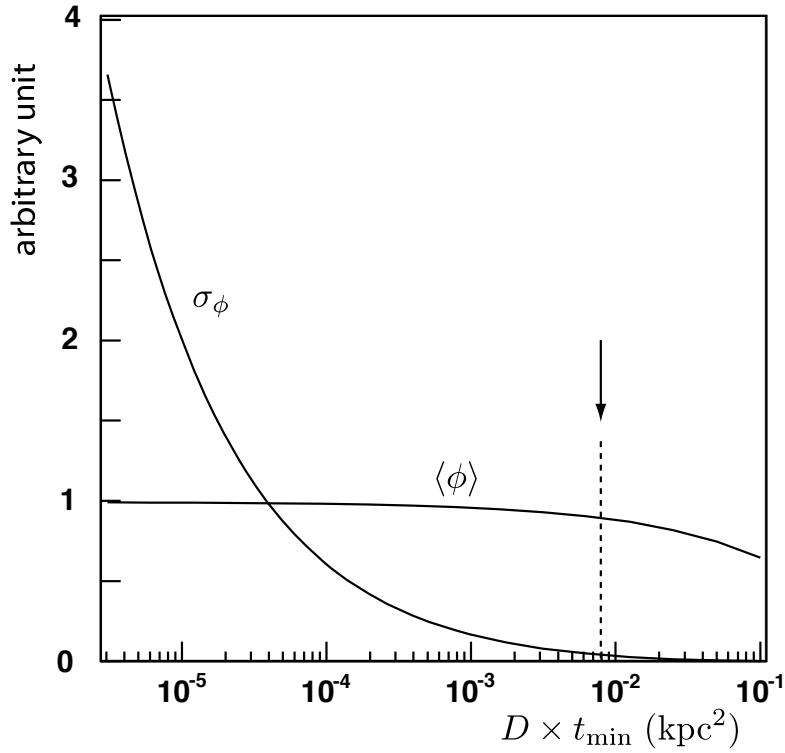


FIGURE 7.3: Évolution de la valeur moyenne du flux et de son écart-type en fonction de la coupure sur l'âge t_{\min} . La coupure obtenue avec la condition $t_{\min} = R_{\max} / \sqrt{4\nu D(E)}$ est indiquée avec une flèche.

$$\frac{\sigma_\phi}{\langle \phi \rangle} \sim \frac{R}{4L \sqrt{2\nu t_{\min}}}$$

Cette quantité ne dépend pas de D , donc si t_{\min} ne dépend pas de l'énergie alors elle ne dépend pas de l'énergie non plus. Elle est de l'ordre de l'unité pour $t_{\min} \sim 100$ yr, on voit donc que le choix de coupure nous empêchant de propager des particules supra-luminiques laisse une variance trop importante.

Pour des sources situées dans un disque épais d'épaisseur h , on peut obtenir le même résultat tant que $h \ll \sqrt{Dt_{\min}}$. Pour la limite opposée, on trouve

$$\frac{\sigma_\phi}{\langle \phi \rangle} \propto D^{1/4}$$

Dans les deux cas, l'écart-type relatif ne varie que très peu avec l'énergie.

La valeur de $\sigma_\phi / \langle \phi \rangle$ dépend de la coupure choisie t_{\min} . Pour une petite valeur de t_{\min} , l'écart-type

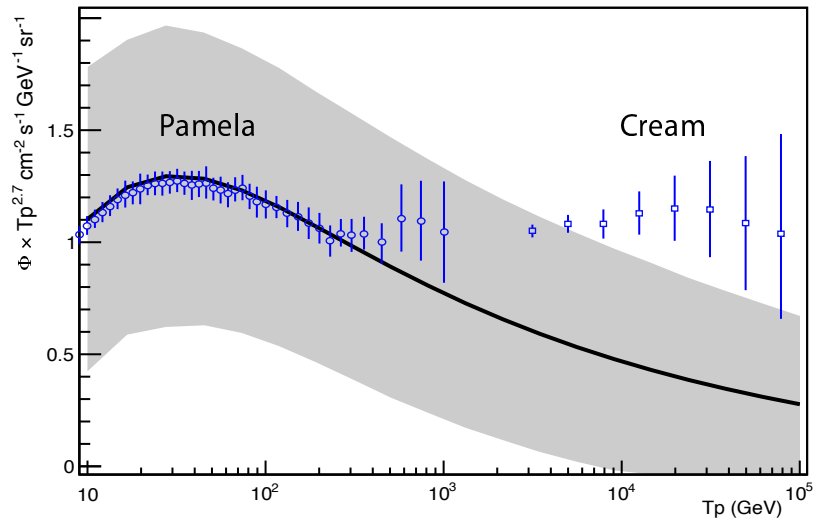


FIGURE 7.4: Flux de protons obtenu dans le cadre du modèle min (présentant l'écart-type le plus important), pour un taux de supernova de $\nu = 3 \text{ siècle}^{-1}$. La bande désigne l'écart-type obtenu analytiquement, avec une coupure en âge de $t_{\min} = 100 \text{ ans}$. Les marqueurs bleus représentent les points de données de CREAM (Yoon et al. 2011) et PAMELA (Adriani et al. 2011).

est très grand. Alors que pour de grandes valeurs de t_{\min} , l'écart-type diminue, mais la valeur moyenne du flux commence à être affectée par la coupure, comme illustré sur la figure 7.3.

Le choix de la prescription reste donc confus et conduit à de situations avec variance faible mais erreurs sur la moyenne, ou moyenne très bien définie mais variance forte. On se penche donc vers d'autres méthodes statistiques pour essayer de régulariser la situation.

4 LA VARIANCE EST INFINIE MAIS LES INTERVALLES DE CONFIANCE SONT FINIS

Afin de mieux comprendre la tendance du flux à s'écarter de sa valeur moyenne, on s'intéresse au comportement à haut flux de la densité de probabilité $P(\phi)$ qui correspond aux sources proches et jeunes. Ce calcul est mené pour le flux issu d'une source ponctuelle venant d'une distribution spatiale et temporelle uniforme. La partie pathologique du flux provient de sources très proches et très jeunes. Pour ces sources, significatives à hautes énergies, les effets du vent galactique, d'échappement et de réaccélération, sont négligeables, on ne les prendra donc pas en compte puisqu'on s'intéresse au comportement asymptotique de $P(\phi)$ à haut ϕ .

Le flux issu d'une diffusion dans un espace à 3 dimensions à une distance r et un temps t d'une source ponctuelle qui émet instantanément toutes ses particules en $r = 0$ et au temps $t = 0$ est donné par (3.36) :

$$\phi = \frac{a}{t^{3/2}} e^{-r^2/DKt} \quad \text{où} \quad a = \frac{q}{(4\pi D)^{3/2}} \frac{v}{4\pi}$$

L'encadré suivant détaille la probabilité de trouver une certaine valeur de ce flux pour une distribution de sources localisée dans le disque infiniment mince.

Cas d'une distribution de sources bidimensionnelle (disque infiniment mince)

On considère d'abord des sources avec un âge donné t . La densité de probabilité pour qu'une source soit à une distance r est donnée par

$$p(r) \equiv \frac{dP(r)}{dr} = \frac{2r}{R^2}$$

où R est le rayon de la région contenant les sources. On a :

$$d\phi = -\frac{2r}{4Dt} \phi$$

donc

$$p(\phi|t) = \frac{dP(\phi, t)}{d\phi} = \frac{4Dt}{R^2} \frac{1}{\phi}$$

Pour un âge t , les flux se situent dans l'intervalle

$$\frac{a}{t^{3/2}} e^{-R^2/4Dt} \leq \phi \leq \frac{a}{t^{3/2}}$$

qui peut être écrit comme

$$p(\phi|t) = \frac{4Dt}{R^2} \frac{1}{\phi} W\left(\frac{a}{t^{3/2}} e^{-R^2/4Dt}, \frac{a}{t^{3/2}}\right)$$

Avec W la fonction fenêtre, égale à 1 dans l'intervalle et 0 à l'extérieur. On vérifie facilement :

$$\int p(\phi|t) d\phi = \frac{4Dt}{R^2} \ln \frac{\phi_{\max}}{\phi_{\min}} = 1$$

La distribution de probabilité pour ϕ est obtenue par

$$p(\phi) = \int p(\phi|t) p(t) dt$$

Avec la limite maximum

$$t_{\max} = a^{2/3} \phi^{-2/3}$$

la limite minimum $t_{\min}(\phi)$ est solution de

$$\phi = \frac{a}{t_{\min}^{3/2}} e^{-R^2/4Dt_{\min}} \quad (7.15)$$

Si la distribution en âges $p(t)$ est uniforme entre 0 et T , nous avons $p(t) = 1/T$ de sorte que

$$p(\phi) = \frac{4D}{R^2 T \phi} \int_{t_{\min}}^{a^{2/3} \phi^{-2/3}} t dt$$

$$p(\phi) = \frac{2D}{R^2 T \phi} \left[a^{4/3} \phi^{-4/3} - t_{\min}^2(\phi) \right]$$

$$p(\phi) = \frac{2Da^{4/3}}{R^2T} \left[\phi^{-7/3} - \frac{t_{\min}^2(\phi)}{\phi a^{4/3}} \right]$$

Ce qui peut être réécrit

$$p(\phi) = \frac{2Da^{4/3}}{R^2T} \phi^{-7/3} \left[1 - e^{-R^2/4Dt_{\min}(\phi)} \right]$$

En choisissant les sources de tous âges, dans ce cas on a $t_{\min} \rightarrow 0$, la probabilité est donc

$$p(\phi) = \frac{2Da^{4/3}}{R^2T} \phi^{-7/3} \tag{7.16}$$

Retenons pour plus tard le comportement de la distribution pour les grandes valeurs de ϕ . Dans ce cas nous avons

$$p(\phi) \propto \phi^{-7/3}$$

Le même calcul est maintenant effectué pour une distribution de sources réparties dans un disque épais de demi-hauteur h .

Cas d'une distribution 3D de sources (disque épais)

Si les sources sont distribuées dans un volume plutôt que sur une surface nous avons :

$$d\phi = -\frac{r}{2Dt} \phi$$

mais

$$p(r) \equiv \frac{dP(r)}{dr} = \frac{3r^2}{R^3}$$

$$dP = \frac{3r^2 dr}{R^3} = \frac{6rDt}{R^3} \frac{d\phi}{\phi}$$

quand

$$r = \sqrt{-4Dt \ln(\phi t^{3/2}/a)}$$

on a

$$p(\phi|t) = \frac{12(Dt)^{3/2}}{R^3} \frac{\sqrt{-\ln(\phi t^{3/2}/a)}}{\phi}$$

Comme précédemment, on peut vérifier que la probabilité totale est égale à 1. Calculons

$$\int p(\phi|t) d\phi = \frac{12(Dt)^{3/2}}{R^3} \int \frac{\sqrt{-\ln(\phi t^{3/2}/a)}}{\phi} d\phi$$

On définit $x = \phi t^{3/2}/a$,

$$\int p(\phi|t) d\phi = \frac{12(Dt)^{3/2}}{R^3} \int_{\phi_{\min} t^{3/2}/a}^{\phi_{\max} t^{3/2}/a} \frac{\sqrt{-\ln x}}{x} dx$$

L'intégrale est donnée par

$$\int \frac{\sqrt{-\ln x}}{x} dx = \frac{2}{3} (-\ln x)^{3/2} + \text{cte}$$

de sorte que

$$\int p(\phi|t) d\phi = \frac{8(Dt)^{3/2}}{R^3} \left[(-\ln x)^{3/2} \right]_{\phi_{\min} t^{3/2}/a}^{\phi_{\max} t^{3/2}/a}$$

Finalement, $\phi_{\max} t^{3/2} = a$ et $\phi_{\min} t^{3/2} = a e^{-R^2/4Dt}$, donc

$$\int p(\phi|t) d\phi = \frac{8(Dt)^{3/2}}{R^3} \left(\frac{R^2}{4Dt} \right)^{3/2} = 1$$

La distribution de probabilité est obtenue par

$$p(\phi) = \int p(\phi|t) p(t) dt$$

Comme précédemment, $p(t) = 1/T$,

$$p(\phi) = \int \frac{12(Dt)^{3/2}}{TR^3} \frac{\sqrt{-\ln(\phi t^{3/2}/a)}}{\phi} dt$$

Avec les limites t_{\min} et t_{\max} les mêmes que précédemment. On définit $y = t\phi^{2/3}/a^{2/3}$,

$$p(\phi) = \int \frac{12a^{5/3}(Dy)^{3/2}}{TR^3\phi} \frac{\sqrt{-\ln y}}{\phi} \frac{dy}{\phi^{2/3}}$$

$$p(\phi) = \frac{12a^{5/3}D^{3/2}}{TR^3\phi^{8/3}} \sqrt{\frac{3}{2}} \int y^{3/2} \sqrt{-\ln y} dy$$

avec $y_{\max} = 1$ and $y_{\min}(\phi)$ solution de $y = \exp(-R^2 a \phi^{2/3} / 6Dy)$. Une solution limite à cette équation est de faire tendre $y \rightarrow 0$. De plus $y_{\min} = 0$ correspond à une situation pour laquelle $t_{\min} = 0$ que nous avons adoptée pour le calcul précédent. La solution est donc donnée par l'intégration de

$$C \equiv \int_0^1 y^{3/2} \sqrt{-\ln y} dy$$

On pose $x = \sqrt{-\ln y}$ ce qui conduit à

$$C = \int_0^\infty 2x^2 e^{-5/2 x^2} dx$$

Puis en posant $u^2 = 5/2 x^2$ on trouve

$$C = 2 \left(\frac{2}{5} \right)^{3/2} \int_0^\infty 2u^2 e^{-u^2} du$$

L'intégrale sur u est tabulée (voir (Gradshteyn et al. 2007)) et vaut $\sqrt{\pi/4} \times 1/2$ On obtient donc

$$p(\phi) = \frac{12a^{5/3}D^{3/2}}{TR^3} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{4}} \phi^{-8/3} \quad (7.17)$$

La distribution se comporte asymptotiquement comme

$$p(\phi) \propto \phi^{-8/3}$$

Donc la probabilité $P(\phi)$ de mesurer un flux ϕ est donnée par $p(\phi) \propto \phi^{-8/3}$ pour des sources situées dans un disque épais et $p(\phi) \propto \phi^{-7/3}$ pour des sources situées dans un disque infiniment mince, pour $\phi \rightarrow \infty$. L'écart-type est lié à $\int \phi^2 p(\phi) d\phi$, qui diverge quand $\phi \rightarrow \infty$. Pour une telle distribution, possédant un moment d'ordre 2 infini, le théorème central limite n'est plus applicable, en tout cas dans sa forme usuelle. Dans ce cas l'écart-type n'est plus un bon estimateur de la dispersion autour de la valeur moyenne.

Cependant, la moyenne est bien définie car $\int \phi p(\phi) d\phi$ est finie, et plus important encore, les intervalles de confiance (ou quantiles), qui définissent un intervalle dans lequel on a une certaine probabilité de trouver le flux, sont bien définis aussi car $\int p(\phi) d\phi$ est finie. Donc la dispersion autour de la valeur moyenne peut être étudiée en calculant les quantiles associés à la distribution de probabilité, plus qu'en utilisant l'écart-type standard, qui n'a pas de signification statistique claire dans ce contexte.

Les quantiles sont définis comme étant des régions avec une probabilité donnée d'obtenir le flux. Ici nous présentons particulièrement des déciles (des quantiles de 10%), ainsi que les intervalles de confiance à 68%, qui sont plus familiers car ils correspondent à un intervalle de $1-\sigma$ pour des distributions gaussiennes. La détermination des incertitudes associées à cette méthode est donnée sur la figure 7.5 dans le modèle "min" (présentant la plus grande dispersion). Il faut être attentif en ajoutant les diverses contributions du flux car les quantiles ne s'ajoutent pas trivialement. Il existe donc des outils statistiques mieux adaptés à notre problème. On observe d'ores et déjà sur cette figure que les variations statistiques des sources autorisent des petites fluctuations dans le flux mais il est très peu probable que cette variation soit responsable d'une brisure de pente.

Étudions rigoureusement la probabilité pour que le flux ait une valeur éloignée de sa moyenne. Pour évaluer cette probabilité prenons le cas le plus simple d'expression du flux : le cas d'une unique source ponctuelle stationnaire située dans le disque galactique. La diffusion se produisant dans un espace sans bornes. La solution de l'équation de diffusion stationnaire en 3D est la même que la

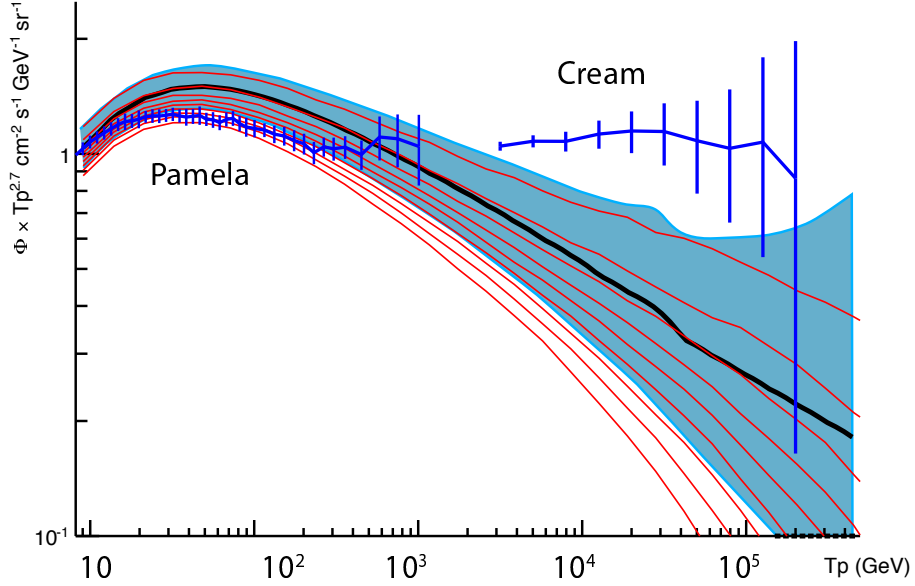


FIGURE 7.5: Représentation des déciles associés aux incertitudes statistiques (en rouge), de l'intervalle de confiance à 68% (en bleu) et du flux moyen (en noir)

solution de l'équation de Poisson en électrostatique pour une charge dans l'espace ([Durand 1966](#)). Cette solution est donnée par :

$$\phi = a/r \quad (7.18)$$

où a est une constante. Si la source a une distribution de probabilité uniforme dans un disque de rayon R ,

$$dp = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{2r dr}{R^2}$$

la valeur moyenne du flux dû aux sources est alors

$$\langle \phi \rangle = \int_0^R \frac{a}{r} \frac{2r dr}{R^2} = \frac{2a}{R}$$

et la valeur moyenne de ϕ^2 est

$$\langle \phi^2 \rangle = \int_\epsilon^R \frac{a^2}{r^2} \frac{2r dr}{R^2} = \frac{a^2}{R^2} \ln\left(\frac{R}{\epsilon}\right)$$

où nous avons introduit la coupure ϵ sur la borne inférieure de la distribution radiale, pour montrer la divergence de $\langle \phi^2 \rangle$. La variance de ϕ tend vers l'infini quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Cependant, la distribution de ϕ est bien définie. On cherche donc à obtenir dp en fonction de ϕ . Pour cela, en partant de l'équation (7.18) on peut écrire :

$$dr = \frac{a d\phi}{\phi^2}$$

de sorte que

$$dp(\phi) = \frac{2r dr}{R^2} = \frac{2a^2 d\phi}{R^2 \phi^3}$$

La probabilité pour que le flux soit plus petit qu'une valeur donnée Φ est donc

$$P(< \Phi) = \int_{\phi(r)}^{\phi(R)} dp(\phi) = 1 - \frac{a^2}{R^2 \Phi^2}$$

pour $\Phi > \Phi_0 \equiv a/R$, en introduisant la fonction de Heavyside Θ , on obtient de la même façon

$$P(> \Phi) = \frac{a^2}{R^2 \Phi^2} \Theta\left(\Phi - \frac{a}{R}\right) = \frac{\langle \phi \rangle^2}{4\Phi^2} \Theta\left(\Phi - \frac{1}{2}\langle \phi \rangle\right)$$

Cette distribution est représentée sur la figure 7.6. La probabilité que Φ soit supérieure à 10 fois le flux moyen par exemple $P(\Phi > 10\langle \phi \rangle)$ est seulement de 1/400, même si la variance est infinie. Il est même plus probable que le flux soit plus bas que la valeur moyenne alors que l'on aurait pu s'attendre au contraire étant donnée la divergence de la variance.

Si on considère N sources, la valeur moyenne du flux ainsi que la variance sont simplement multipliées par N . La distribution de probabilité $P_N(\phi)$ pour le flux peut être obtenue par récurrence en convoluant

$$P_N(\phi) = \int P_1(\phi_1) P_{N-1}(\phi - \phi_1) d\phi_1$$

Elles sont présentées sur la figure 7.7. La variance diverge. Dans la région à grand ϕ , la distribution de probabilité est donnée par :

$$\frac{dp_N}{d\phi} = N \frac{dp_1}{d\phi} = \frac{2Na^2}{R^2 \phi^3}$$

Pour $N = 100$ sources, la probabilité que $\phi > 2\langle \phi \rangle$ est 2.5×10^{-3} et $P(\phi > 10\langle \phi \rangle)$ est extrêmement petite.

Ce résultat illustre très bien le problème de la variance dans ce contexte. On voit également que plus le nombre de sources est élevé, et plus la distribution est piquée, moins on s'attend à pouvoir trouver une valeur du flux éloignée de la valeur moyenne. Pour finir ajoutons que ce problème de variance est propre au modèle non stationnaire, en effet après avoir calculé cette variance pour différents modèles

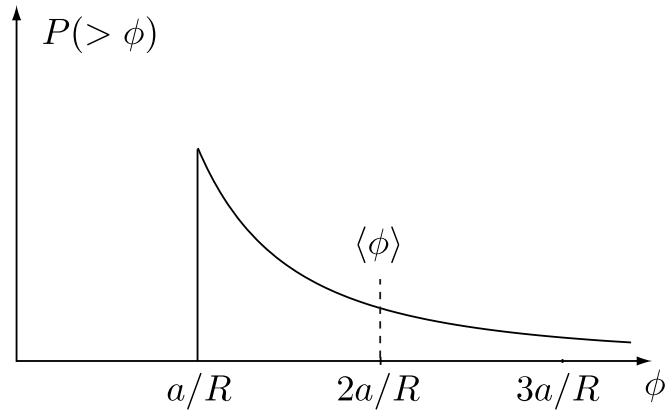


FIGURE 7.6: Probabilité pour que le flux a/r soit plus grand que ϕ , pour une source ponctuelle unique tirée au hasard dans le disque de rayon R .

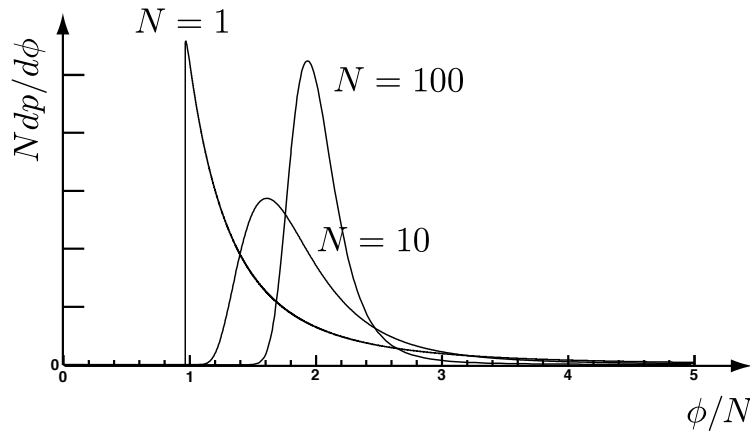


FIGURE 7.7: Distribution de probabilité de ϕ/N pour $N = 1, 10$ et 100 sources.

(voir Tableau 7.1) il se trouve que, si par exemple on s'intéresse à la distribution homogène 3D de sources stationnaires, cette variance est finie. La divergence de cette variance est donc un problème purement mathématique mais qui peut conduire à une incompréhension du problème. La figure 7.8 montre les histogrammes pour les flux obtenus avec le propagateur de sources réalistes dépendantes du temps, pour plusieurs énergies. Ces flux sont normalisés au flux moyen et montrent l'étalement des flux locaux. En effet, à 200 GeV une partie de la population des sources est dominée par les sources vieilles et proches qui constituent la queue de distribution. À 10^7 GeV les sources jeunes n'ont pas le temps d'émettre jusqu'au Système solaire, la queue de distribution est coupée. À 10^5 GeV le flux dominant est le flux local, c'est pourquoi on trouve que la distribution est piquée sur le flux moyen.

L'interprétation usuelle de la variance est à laisser de côté, elle conduit à de faux résultat et ne

TABLE 7.1: Divergence de la variance

	2D	3D
stationnaire	$\langle \phi \rangle$ finie $\langle \phi^2 \rangle \rightarrow \infty$	$\langle \phi \rangle$ finie $\langle \phi^2 \rangle$ finie
dépendant du temps	$\langle \phi \rangle$ finie $\langle \phi^2 \rangle \rightarrow \infty$	$\langle \phi \rangle$ finie $\langle \phi^2 \rangle \rightarrow \infty$

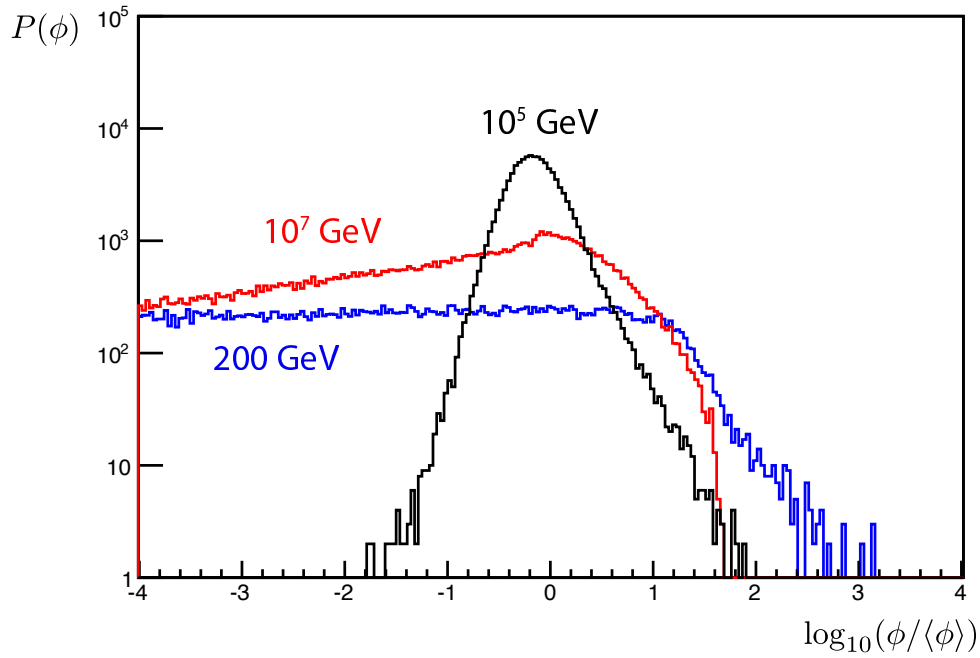


FIGURE 7.8: Exemples d'histogrammes de flux locaux pour le modèle "min"

donne aucune information sur le comportement des distributions. Nous essayerons donc de travailler avec les intervalles de confiance pour une vraie représentation de la dispersion des distributions. Nous allons voir qu'il existe des outils analytiques puissants et efficaces pour calculer ces intervalles de confiance.

5 UNE MÉTHODE ANALYTIQUE POUR LES INTERVALLES DE CONFIANCE

L'inconvénient des quantiles vient du temps de calcul associé à leur détermination. En effet, la divergence de la variance vient de la queue lourde de la distribution de flux, c'est à dire une queue remplie d'évènements très peu probables et étalés sur une grande échelle de flux (voir la figure 7.1). C'est pourquoi pour tracer les quantiles, et particulièrement les quantiles élevés, c'est-à-dire les zones contenant 80 % voire 90 % de flux, la statistique requise demande un temps de calcul trop important. Nous nous intéressons donc ici aux pistes de résolution analytique.

Il existe des méthodes, associées aux distributions stables, pour les caractériser entièrement, calculer leurs quantiles, et généraliser le théorème centrale limite pour des distributions dont le moment d'ordre 2 n'est pas défini. Une version complète de la théorie des distributions stables peut être trouvée en (Uchaikin et al. 2011), une version plus synthétisée sur laquelle nous nous appuyons ici est donnée par (Nolan 2013). Notons également que ces méthodes ont déjà été appliquées sur des flux d'électrons et de positons par (Mertsch 2011). Commençons par rappeler ce que sont des distributions stables

Définition : Une variable aléatoire X est stable si et seulement si pour tout $n > 1$, $\exists C_n > 0$ et $d_n \in \mathbb{R}$:

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + d_n \quad (7.19)$$

Le signe $\stackrel{d}{=}$ signifie égalité en distribution

Définition : Une variable aléatoire X est stable si et seulement si $X \stackrel{d}{=} aZ + b$ avec $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et Z une variable aléatoire avec comme fonction caractéristique :

$$E(\exp(iuZ)) = \begin{cases} \exp\left(-|u|^\alpha \left[1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}(u)\right]\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-|u| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(u) \log |u|\right]\right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (7.20)$$

avec $0 < \alpha \leq 2$ et $-1 \leq \beta \leq 1$

Par exemple, la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ est une distribution stable avec $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $a = \sigma/\sqrt{2}$ et $b = \mu$.

De manière générale, pour décrire une distribution stable on utilise 4 paramètres :

- Un indice de stabilité $\alpha \in]0; 2]$
- Un coefficient de dissymétrie $\beta \in [-1; 1]$
- Un paramètre d'échelle $\gamma \geq 0$
- Un paramètre de position $\delta \in \mathbb{R}$

Il existe beaucoup de paramétrisations différentes pour les distributions stables, on les distingue par

un indice supplémentaire k . On caractérise finalement ces distributions avec la notation :

$$S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; k)$$

Définition : Une variable aléatoire est $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ si :

$$X \stackrel{d}{=} \begin{cases} \gamma(Z - \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + \delta & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + \delta & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (7.21)$$

avec $Z = Z(\alpha, \beta)$ donné par (7.20). En utilisant (7.20), on trouve :

$$E(\exp(iuX)) = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |u|^\alpha [1 + i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}(u) (|\gamma u|^{1-\alpha} - 1)] + i\delta u) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |u| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(u) \log(\gamma |u|)] + i\delta u) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (7.22)$$

Définition : Une variable aléatoire est $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ si :

$$X \stackrel{d}{=} \begin{cases} \gamma Z + \delta & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + (\delta + \beta \frac{2}{\pi} \gamma \log \gamma) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (7.23)$$

avec $Z = Z(\alpha, \beta)$ donné par (7.20). En utilisant (7.20), on trouve :

$$E(\exp(iuX)) = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |u|^\alpha [1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}(u)] + i\delta u) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |u| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(u) \log |u|] + i\delta u) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (7.24)$$

Notons, qu'entre ces deux paramétrisations, pour une même distribution, α, β et γ sont identiques. Seul le paramètre δ change. Il existe néanmoins un lien constitué par ces relations :

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta_1 + \beta \gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \delta_1 + \beta \frac{2}{\pi} \gamma \log \gamma & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (7.25)$$

$$\delta_1 = \begin{cases} \delta_0 - \beta \gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \delta_0 - \beta \frac{2}{\pi} \gamma \log \gamma & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (7.26)$$

On utilise ensuite des propriétés de réflexion des distributions ainsi que les fonctions caractéristiques pour trouver le comportement asymptotique des distributions (encore à démontrer)

Soit $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ avec $\alpha \in]0; 2[$ et $\beta \in [-1; 1]$. Quand $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} P(X > x) &\sim \gamma^\alpha c_\alpha (1 + \beta) x^{-\alpha} \\ f(x) &\sim \alpha \gamma^\alpha c_\alpha (1 + \beta) x^{-\alpha+1} \\ \text{avec } c_\alpha &= \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Où Γ désigne la fonction Γ d'Euler.

Pour l'autre côté de la distribution, il faut utiliser ses propriétés de réflexion, pour trouver :

$$\begin{aligned} P(X < -x) &\sim \gamma^\alpha c_\alpha (1 - \beta) x^{-\alpha} \\ f(-x) &\sim \alpha \gamma^\alpha c_\alpha (1 - \beta) x^{-\alpha+1} \\ \text{avec } c_\alpha &= \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Pour une distribution donnée, avec $k = 0$, les quantiles sont tabulés en fonction de $\alpha, \beta, \gamma = 1$ et $\delta = 0$. On appelle z_λ le $\lambda^{\text{ème}}$ quantile, c'est à dire la valeur z pour laquelle $P(Z < z_\lambda) = \lambda$. Pour la distribution normale par exemple, on utilise couramment la valeur $z_{0.975} = 1.96$, on retrouve alors le 0.025^{ème} quantile en calculant $\mu - 1.96 \sigma$ et le 0.975^{ème} quantile grâce à $\mu + 1.96 \sigma$. L'intervalle entre les deux correspond à une région où se trouve 95% de la distribution.

L'équation (7.28) nous montre que connaître le comportement de la distribution à très grand flux nous permet de déterminer les quantiles. Subsiste le problème du calcul du σ résolu par la suite.

Les tables utilisées reportent les valeurs des quantiles pour les distributions avec $\gamma = 1$ et $\delta = 0$, pour une distribution $k = 0$. Pour retrouver la valeur correcte de z_λ il faut la pondérer comme suit

$$z_\lambda = \gamma z_{\lambda(\gamma=1, \delta=0)} + \delta \quad (7.29)$$

Pour utiliser les tables avec des distributions $k = 1$ alors il faut modifier préalablement les valeurs de δ en utilisant (7.25).

5.1 Somme de variables aléatoires stables

Nous utilisons ici une propriété fondamentale : la somme de variables aléatoires α -stables (avec le même α) est α -stable. C'est à dire, pour une somme de n variables aléatoires stables, pour tous les $X_j \sim S(\alpha, \beta_j, \gamma_j, \delta_j; k)$ indépendants les uns des autres et des constantes arbitraires w_j nous avons :

$$w_1 X_1 + \dots + w_n X_n \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; k) \quad (7.30)$$

On peut vérifier, grâce aux paramétrisations précédentes que :

$$\gamma^\alpha = \sum_{j=1}^n |w_j \gamma_j|^\alpha \quad (7.31)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma^\alpha} \sum_{j=1}^n \beta_j \operatorname{sgn}(w_j) |w_j \gamma_j|^\alpha \quad (7.32)$$

$$\delta = \begin{cases} \sum_{j=1}^n w_j \delta_j + \tan \frac{\pi\alpha}{2} (\beta\gamma - \sum_{j=1}^n \beta w_j \gamma_j) & k = 0, \alpha \neq 1 \\ \sum_{j=1}^n w_j + \frac{2}{\pi} (\beta\gamma \log \gamma - \sum_{j=1}^n \beta w_j \gamma_j \log |w_j \gamma_j|) \delta_j & k = 0, \alpha = 1 \\ \sum_{j=1}^n w_j \delta_j & k = 1, \alpha \neq 1 \\ \sum_{j=1}^n w_j \delta_j - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^n \beta w_j \gamma_j \log |w_j| & k = 1, \alpha = 1 \end{cases} \quad (7.33)$$

Notre cas est un peu particulier, nous avons une somme de n variables aléatoires identiques et indépendantes, dans ce cas, on montre que :

$$X_1 + \dots + X_n \sim S(\alpha, \beta, n^{1/\alpha} \gamma, \delta_n; k) \quad (7.34)$$

avec

$$\delta_n = \begin{cases} n\delta + \gamma\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} (n^{1/\alpha} - n) & k = 0, \alpha \neq 1 \\ n\delta + \gamma\beta \frac{2}{\pi} n \log n & k = 0, \alpha = 1 \\ n\delta & k = 1 \end{cases} \quad (7.35)$$

5.2 Théorème central limite généralisé

Le théorème de la limite centrale, dans sa forme classique, stipule que la somme des variables aléatoires, indépendantes et identiques avec une variance finie converge vers une distribution normale. Ce qui peut être écrit :

$$\frac{\langle X \rangle - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (7.36)$$

Avec $\langle X_n \rangle = (X_1 + \dots + X_n)/n$, μ , la valeur moyenne de X_i et σ^2 sa variance. En termes de distributions stable ce peut être réécrit :

$$\frac{\langle X \rangle - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1) \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (7.37)$$

Étendons cette définition aux distributions stables

Définition : Une variable aléatoire X est dans le domaine d'attraction de Z si et seulement si, $\exists a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$a_n(X_1 + \dots + X_n) - b_n \xrightarrow{d} Z$$

Où X_1, \dots, X_n sont des copies indépendantes de X avec la même pondération. On appelle $DA(Z)$ le jeu de variables aléatoires qui sont dans le domaine d'attraction de Z .

Théorème : Le théorème centrale limite généralisé : Une variable aléatoire non dégénérée Z , est α -stable pour tout $0 < \alpha \leq 2$ si et seulement si il existe une séquence de variables aléatoires également distribuées, indépendantes $X_1, X_2, X_3 \dots$ et des constantes $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ avec

$$a_n(X_1 + \dots + X_n) - b_n \xrightarrow{d} Z \quad (7.38)$$

Dans le cas de la loi normale, par identification

$$a_n = 1/(\sigma \sqrt{n})$$

et

$$b_n = \sqrt{n} \mu / \sigma$$

On généralise donc un équivalent de σ , pour les distributions stables à

$$\sigma_{Tot} \equiv \sigma \sqrt{n} = \frac{1}{a_n} \quad (7.39)$$

Il faut toutefois ici bien clarifier sa signification, pour une distribution donnée σ , ne correspond pas à l'écart-type de la distribution, mais permet d'évaluer les intervalles de confiance.

Soit une variable aléatoire stable X , X_1, X_2, X_3 des copies indépendantes de X et réparties également, si

$$\begin{aligned} x^\alpha P(X > x) &\rightarrow c_+ \\ x^\alpha P(X < -x) &\rightarrow c_- \end{aligned} \quad (7.40)$$

On montre, en utilisant le théorème centrale limite généralisé que

$$a_n(X_1 + \dots + X_n) - b_n \xrightarrow{d} Z \sim S(\alpha, \beta, 1, 0; 1) \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (7.41)$$

Particulièrement, dans le cas où la distribution est définie uniquement sur \mathbb{R}_+ , on a

$$a_n(X_1 + \dots + X_n) - b_n \xrightarrow{d} Z \sim S(\alpha, 1, 1, 0; 1) \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (7.42)$$

Et a_n et b_n sont donnés par

$$a_n = \left(2\Gamma(\alpha) \frac{\sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi(c_+ + c_-)} \right)^{1/\alpha} n^{-1/\alpha} \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned} b_n &= na_n\mu \\ \beta &= \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Pour calculer les quantiles, la recette est maintenant simple. Dans un premier temps, il faut obtenir les valeurs de c_+ , de c_- et de α grâce au comportement asymptotique de la distribution. Ces valeurs permettent d'obtenir $\sigma \sqrt{n} = \frac{1}{a_n}$ via l'équation (7.43).

Dans ce contexte, l'intervalle de confiance est défini par

$$I_\lambda = [\mu - \sigma z_\lambda; \mu + \sigma z_\lambda] \quad (7.45)$$

Avec μ la valeur moyenne de la distribution.

On cherche ensuite la valeur de z_λ du $\lambda^{\text{ème}}$ quantile. Ces valeurs sont tabulées pour les distributions pour lesquelles $\delta = 0$ et $k = 1$. On modifie donc un peu la distribution en utilisant $S(\alpha, 1, 1, \delta_1; 1) = S(\alpha, 1, 1, \delta_0; 0)$ avec δ_0 donné par l'équation (7.25) et ici $\delta_1 = 0$. On cherche ensuite le quantile $z_{\lambda(\gamma=1, \delta_0=0)}$ de la distribution $S(\alpha, 1, 1, 1; 0)$ en utilisant le programme STABLE (Nolan 2010) qui contient les tables de ces valeurs. Puis on décale le quantile avec la formule $z_\lambda = \gamma z_{\lambda(\gamma=1, \delta_0=0)} + \delta_0$ avec ici $\gamma = 1$, pour obtenir le quantile de la distribution recherchée.

Grâce aux équations (7.16) et (7.17), nous connaissons le comportement de ces distributions, donc cette théorie est applicable. Néanmoins l'interface du programme STABLE avec notre code étant relativement compliqué cette tâche a été laissée pour plus tard.

6 SOURCES LOCALES CONNUES — LE CATALOGUE

La situation décrite précédemment correspond à un cas où nous n'avons aucune information sur la position et les âges des sources de rayons cosmiques. Cependant il se trouve que nous avons des données sur la distribution des sources proches. Et par conséquent nous pouvons enlever cette zone proche de notre ensemble statistique. Comme nous l'avons vu en section 7 (page 169), ce sont précisément ces sources qui conduisent à une divergence de la variance du flux. Nous avons donc séparé les sources en deux lots, le premier contient les sources proches connues, le flux correspondant est appelé flux local. Le deuxième, tiré au sort, est issu d'une distribution de sources plausible. Ce lot est

appelé flux extérieur. Comme les flux issus de chaque sources sont additifs, on a

$$\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{loc}} + \Phi_{\text{ext}} \quad (7.46)$$

Le flux extérieur ne présente pas de divergence dans son calcul de variance, puisque la limite spatio-temporelle inférieure de l'intégration des sources est repoussée à une limite finie non nulle. Cependant il nous faut construire le catalogue. En suivant l'exemple de (Delahaye et al. 2010), nous avons utilisé deux catalogues, le premier est le catalogue de vestiges de supernovæ de Green (Green 2009) qui regroupe diverses informations concernant les restes de supernovæ galactiques. Malheureusement ce catalogue ne donne pas systématiquement l'âge des sources ou encore l'incertitude sur leur distance par rapport au Soleil. Un gros travail bibliographique a été fait et résumé dans (Delahaye et al. 2010) que nous avons utilisé en complément du catalogue de Green pour la zone locale. On commence par définir ce qu'on appelle la zone locale, pour cela on essaie de savoir si les sources du catalogue sont représentatives des distributions théoriques de sources que nous utilisons. On introduit une coupure en distance à 2 kpc du fait que le travail de (Delahaye et al. 2010) ne porte que sur ces supernovæ locales. Au total, dans cet intervalle, le catalogue est composé de 30 vestiges de supernovæ avec leur âges, distances, et les incertitudes liées à ces observables lorsqu'elles existent (voir 7.2). Le second catalogue utilisé est le catalogue de pulsars de l'ATNF (Manchester et al. 2005), les pulsars ne sont pas connus pour être des sources de protons ou d'héliums cosmiques, mais ils sont formés lors de l'explosion des supernovæ, donc on considère qu'ils sont de bons traceurs de vieux vestiges de supernovæ, trop vieux pour être détectés directement dans la gamme radio. De plus, grâce au "spin-down" (le ralentissement progressif de la vitesse de rotation du pulsar au cours de sa vie), leur âge peut être estimé précisément. Après avoir supprimé les pulsars milliseconde qui correspondent aux vestiges les plus vieux et les pulsars associés à des vestiges de supernovæ déjà présents dans le catalogue de Green, il reste 157 pulsars avec leurs âges et distances par rapport au Soleil.

Il est important de se demander si ces 30+157 sources sont représentatives de l'environnement local. Sur la figure 7.9, on trace le nombre de sources du catalogue et le nombre de sources attendu à partir de plusieurs distributions théoriques. Cette figure est tracée pour plusieurs âges maximaux de sources (pour des sources situées en $r < 2$ kpc). On voit que le nombre de sources trouvées dans le catalogue est en accord avec les distributions théoriques de sources avec un taux d'explosion d'environ 3 par siècle. C'est en tout cas vrai pour les sources situées dans un rayon d'environ 2 kpc autour du Soleil et plus jeunes que 30 000 ans. Pour les sources plus vieilles, les vestiges de supernovæ deviennent difficilement détectables, et on ne peut plus suivre le catalogue à la lettre. En première approche il semble donc que le catalogue ne souffre pas de biais par rapport aux distributions théoriques. Par conséquent, nous définissons en accord avec ce catalogue, une zone "locale" comme la région s'étendant à 2 kpc autour du Soleil et contenant des sources allant jusqu'à 30 000 ans. Le fait est que dans la littérature on trouve un taux d'explosion allant de 1 à 3 supernova par siècle, ce qui veut dire, si on considère la borne inférieure, que nous nous situons dans une zone de surdensité dans la galaxie.

SNR G+long+lat	other name	distance [kpc]	age [kyr]	Pulsar
18.95-1.1		$2. \pm 0.1$	11.75 ± 0.85	?
65.3+5.7		0.9 ± 0.1	26 ± 1	\emptyset
65.7+1.2	DA 495	1.0 ± 0.4	16.75 ± 3.25	unknown
69.0+2.7	CTB 80	2.0 ± 0.1	20 ± 1	J1952+3252
74.0-8.5	Cygnus Loop	$0.54^{+0.10}_{-0.08}$	10 ± 1	\emptyset
78.2+2.1	γ Cygni	1.5 ± 0.1	7 ± 1	\emptyset
82.2+5.3	W63	2.3 ± 1.0	20.1 ± 6.6	\emptyset
89.0+4.7	HB 21	1.7 ± 0.5	5.60 ± 0.28	\emptyset
93.7-0.2	CTB 104A / DA 551	1.5 ± 0.2	50 ± 20	\emptyset
114.3+0.3		0.7	7.7 ± 0.1	\emptyset
116.5+1.1		1.6	20 ± 5	B2334+61 ?
116.9+0.2	CTB 1	1.6	20 ± 5	B2334+61 ?
119.5+10.2	CTA 1	1.4 ± 0.3	10 ± 5	J0010+7309
127.1+0.5	R5	$1. \pm 0.1$	25 ± 5	\emptyset
156.2+5.7		0.8 ± 0.5	10 ± 1	B0450+55 ?
160.9+2.6	HB 9	0.8 ± 0.4	5.5 ± 1.5	B0458+46
180.0-1.7	S147	1.2 ± 0.4	600 ± 10	J0538+2817
184.6-5.8	Crab / 3C144 / SN1054	2.0 ± 0.5	$7.5 \star$	B0521+31
189.1+3.0	IC 443	1.5 ± 0.1	30 or 4	\emptyset
203.0+12.0	Monogem ring	$0.288^{+0.033}_{-0.027}$	86 ± 1	B0656+14
205.5+0.5	Monoceros Nebula	1.63 ± 0.25	29 ± 1	\emptyset
263.9-3.3	Vela(XYZ)	0.295 ± 0.075	11.2 ± 0.1	B0833-45
266.2-1.2	Vela Jr / SN1300	0.75 ± 0.01	$3.5 \pm 0.8 \star ?$	J0855-4644 ?
276.5+19.0	Antlia	0.2 ± 0.14	$\geq 1,000$	B0950+08
315.1+2.7		1.7 ± 0.8	50 ± 10	J1423-56
330.0+15.0	Lupus Loop	0.8 ± 0.1	50 ± 10	B1507-44 ?
347.3-0.5	SN393	$1. \pm 0.3$	$4.9 \star$	\emptyset
73.90+0.90		1.5 ± 0.5	11.5 ± 0.50	\emptyset
107.50-1.50		1.1	4.5	\emptyset
272.20-3.20		3.4 ± 1.6	8.5 ± 0.1	\emptyset

TABLE 7.2: Catalogue de sources proches

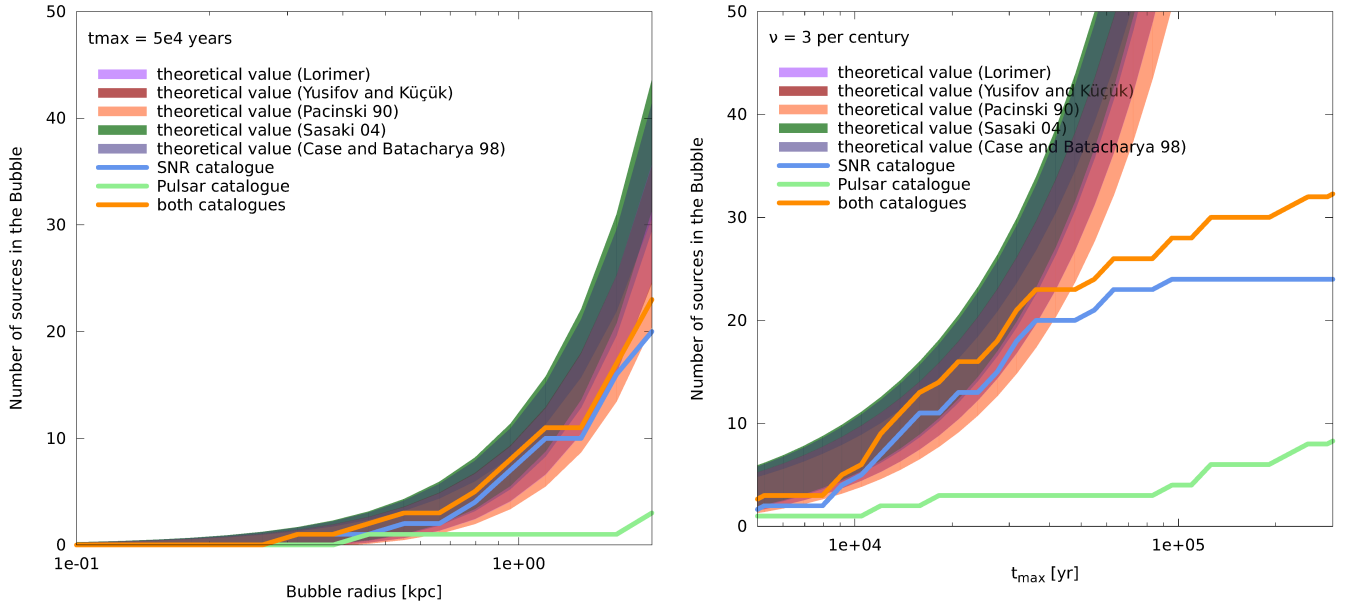


FIGURE 7.9: Les bandes montrent le nombre théorique de sources attendues dans une distance r pour un âge donné (à gauche) ou avec un âge inférieur à t pour une distance donnée (à droite), le tout pour un taux de supernovæ de 3 par siècle dans la galaxie. La largeur des bandes indique l'incertitude sur le nombre théorique de sources locales, due à l'effet de « shot noise » (incertitude en $1/\sqrt{N}$). Les courbes montrent le nombre cumulé de sources dans le catalogue. Le catalogue semble complet pour $t < 5 \times 10^4$ y et $r < 2$ kpc.

Pour information, on donne sur la figure 7.10 le flux de rayons cosmique provenant de chaque SNR du catalogue de Green. On illustre également le flux de rayons cosmiques provenant des SNRs associées aux pulsars du catalogue ATNF. Les flux issus de SNRs associées aux pulsars dominent dans la région de mesures de PAMELA (à basse énergie), alors que le flux issu de SNRs observées domine la région de CREAM. C'est en fait normal, les sources jeunes sont toutes des supernovæ observées (sauf une exception) et donc dominent à haute énergie. Les pulsars tracent des sources plus vieilles donc dans la région de basse énergie. En adoptant la coupure en âge à 30 000 ans, on s'aperçoit qu'en fait le flux des SNR associées aux pulsars du catalogue de l'ATNF est négligeable. De plus, le flux semble présenter des fluctuations à quelques centaines de GeV de l'ordre de quelques pourcents. Nous allons donc vérifier que ces fluctuations sont bien des fluctuations statistiques et que le catalogue n'est pas une réalisation improbable de sources dans la galaxie.

6.1 Le catalogue est-il probable ?

Pour juger de la validité du catalogue, nous avons comparé (voir figure 7.11) le flux provenant des sources connues (courbe bleue) au flux provenant d'un ensemble aléatoire de sources (courbe noire).

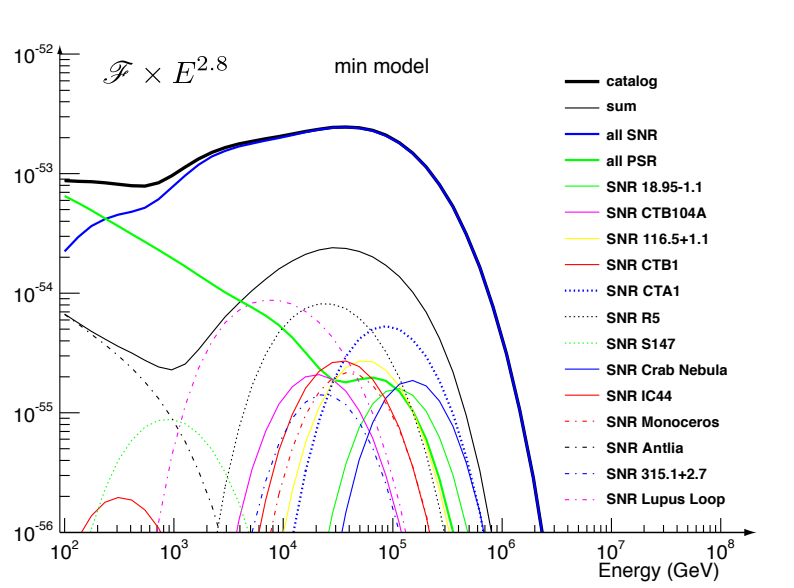


FIGURE 7.10: Flux des SNR et des pulsars du catalogue

Comme expliqué précédemment, nous n'avons pas calculé la variance de la population statistique, mais uniquement les intervalles de confiance. Les trois jeux de paramètres "min", "med" et "max" conduisent à des flux qui sont dans un intervalle de confiance de $1-\sigma$ autour de la valeur moyenne, avec un taux d'explosion de 3 supernovæ par siècle dans la galaxie. Donc la distribution de sources théorique et le taux d'explosion choisis sont en bon accord avec les fluctuations statistiques. On a également représenté les incertitudes provenant de la mesure de l'âge et la position des SNR. Cependant, cette figure ne veut pas dire que la distribution de sources choisie et le taux d'explosion correspondent à ceux provenant de toute la galaxie. On peut conclure que les hypothèses faites sur le taux d'explosion et le catalogue sont compatibles avec les distributions statistiques spatiales et temporelles de sources utilisées.

6.2 Les erreurs systématiques du catalogue

Les incertitudes associées au catalogue sont évaluées en faisant varier les paramètres des sources dans le catalogue (distance et âges), dans l'intervalle formé par les incertitudes observationnelles. On peut voir sur la figure 7.11 les barres d'erreurs résultantes. On ne considère pas les incertitudes sur l'âge et la position des pulsars car leur contribution au flux est beaucoup moins importante que celle des SNR, comme on peut le voir sur la figure 7.10.

De plus, les âges des pulsars sont bien connus, car leur période de rotation et la dérivée de cette période peut être mesurée avec une bonne précision. On peut alors supposer que les incertitudes liées à leurs mesures sont négligeables face à celles des SNR. Les erreurs sur le catalogue ont leur

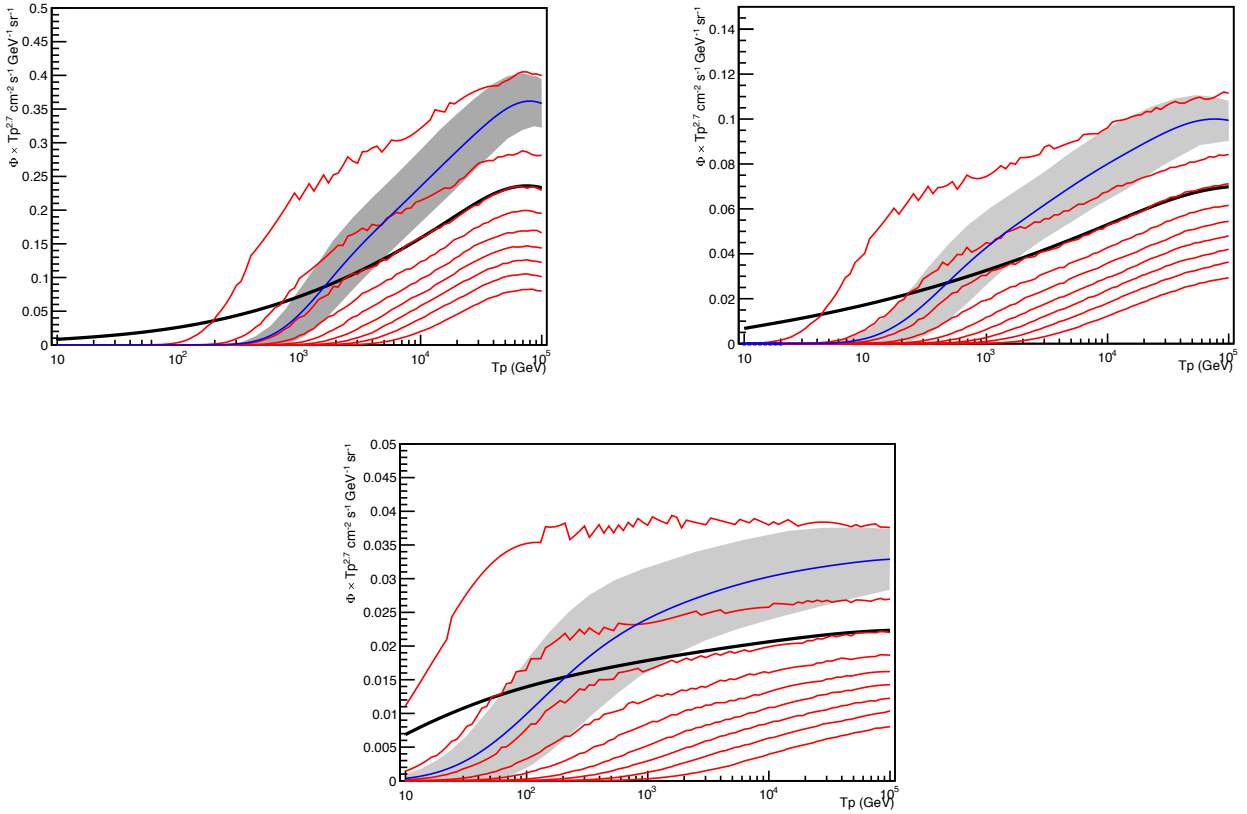


FIGURE 7.11: Les courbes rouges montrent les quantiles à 10% pour le flux issu de sources aléatoires tirées dans la zone locale. Le flux moyen est indiqué par la courbe noire. Le flux issu de sources provenant du catalogue est représenté en bleu, avec leurs incertitudes de mesure indiquées par la bande grise. Toutes les courbes sont tracées pour $\nu = 3 \text{ siècle}^{-1}$. Les trois modèles de propagation "min" (haut gauche), "med" (bas) et "max" (droite) sont considérés.

importance, en fonction du modèle, elles peuvent changer le flux d'environ 10 %. Nous garderons donc en tête ces erreurs pour la suite de l'étude.

7 INCERTITUDE FINALES SUR LE FLUX

Avec le catalogue nous avons un flux de la forme

$$\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{loc}} + \Phi_{\text{ext}} \quad (7.47)$$

Nous pouvons donc formellement calculer la variance associée au flux extérieur. On représente sur la figure 7.13 le flux extérieur et sa variance. Ces deux quantités sont considérées pour deux distributions de sources selon l'axe z différentes. Comme attendu, le flux associé aux sources extérieures (par définition les sources vieilles et proches ainsi que toutes les sources lointaines) est associé au flux à basse énergie. L'écart-type est ici bien défini. Pour s'en convaincre on trace également sur la figure 7.13, l'intervalle de confiance à 68% (en gris) associé aux sources situées en dehors de la région locale mais par la méthode des déciles. Comme prévu par le théorème central limite, valide dans ce domaine, l'écart-type est très proche de l'intervalle de confiance à 68 % en conséquence les bandes sont similaires entre les figures 7.12 et 7.13. La figure 7.12 montre également les quantiles à 10 % (séparés par les courbes rouges) pour le flux total, en considérant les trois jeux de paramètres. On remarque qu'à haute énergie, dans la zone dominée par les sources locales, les intervalles de confiance associés aux sources extérieures sont vraiment petits. On pourra donc les négliger, notamment en regard des erreurs associées au catalogue.

Notons que sur ces figures, pour calculer correctement les flux, on ajuste l'injection énergétique en protons, de sorte que le flux moyen suive les données de PAMELA en dessous de 200 GeV, et suive une loi de puissance simple après 200 GeV. La quantité qui nous intéresse, c'est-à-dire la dispersion des flux autour de la valeur moyenne, n'est pas sensible à ce choix. Cependant on peut voir que la dispersion de cette distribution est très sensible au modèle de propagation et particulièrement à l'épaisseur du halo diffusif L . En effet plus L est grand plus l'échappement par les bords verticaux est important et plus nous sommes sensibles à un petit nombre de sources. Naturellement il en résulte une plus grande erreur statistique.

Le flux obtenu par les rayons cosmiques dans le modèle de la myriade possède une moyenne bien définie, qui converge bien vers le modèle stationnaire, ce qui donne du crédit à ce dernier. Cependant pour étudier ses incertitudes statistiques il faut être prudent car il n'est pas possible d'utiliser l'écart-type classique, c'est pourquoi nous avons présenté ici plusieurs méthodes à utiliser. Cette étude nous a également permis de nous rendre compte qu'une fluctuation statistique issue de la distribution de sources n'a que peu de chances de reproduire les données.

D'autre part, l'étude du catalogue nous a montré que le nombre de sources locales est en accord avec un taux d'explosion d'environ 3 supernovæ par siècle. Or les observations nous indiquent que le taux observé dans notre galaxie est compris entre $\nu \in [0.8, 3]$. Il est donc possible que nous nous situons dans une zone de surdensité de sources. L'étude précédente nous montre qu'il est hautement

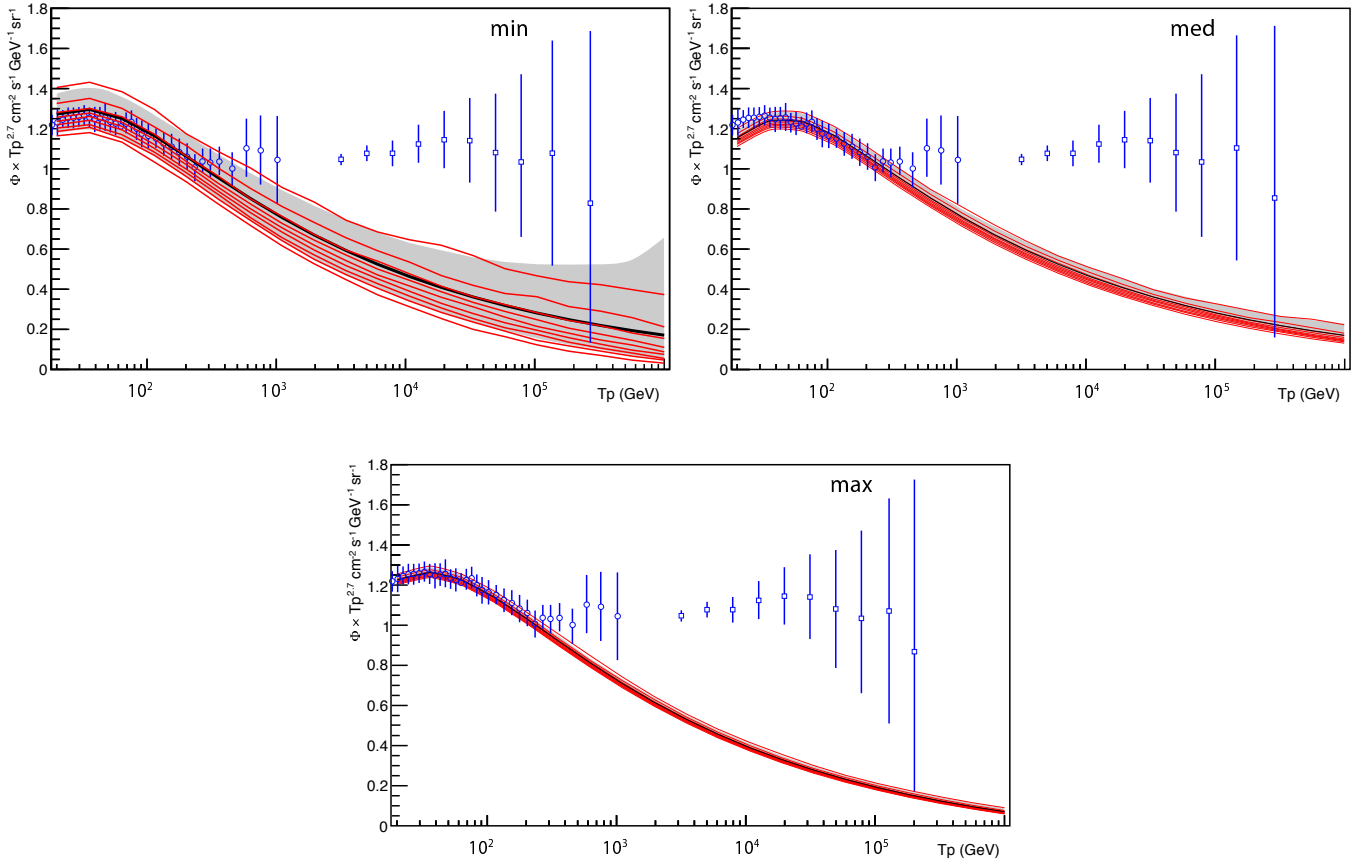


FIGURE 7.12: Les intervalles de confiance pour le flux provenant de toute les sources : la courbe rouge montre les quantiles à 10 %, la courbe noire montre la valeur moyenne et la bande grise l'intervalle de confiance à 68% pour le flux, en considérant un taux d'explosion de $\nu = 3 \text{ siècle}^{-1}$.

improbable que cette surdensité soit uniquement due à une fluctuation dans la distribution de sources. Il faut donc se tourner vers d'autres interprétations :

Nous n'avons pas pris en compte les bras spiraux de la galaxie. Ces ondes de densité correspondent aux lieux de naissance et de vie des étoiles, et par conséquent des supernovæ. En fonction de notre positionnement il peut être plus ou moins probable d'être dans une zone plus dense.

Nous avons considéré dans cette étude la position et l'âge des sources comme étant des variables aléatoires indépendantes les unes des autres. Or, comme discuté dans la section 2.2 (page 45), les observations dans la galaxie montrent qu'à grande échelle cette affirmation est correcte. Sur des échelles spatiales plus petites, de plusieurs centaines de parsecs, cette affirmation n'est plus complètement vraie, en effet certains indices, comme la présence de bulles locales, tendent à montrer que certaines étoiles naissent en groupe et peuvent finir leur vie groupées également.

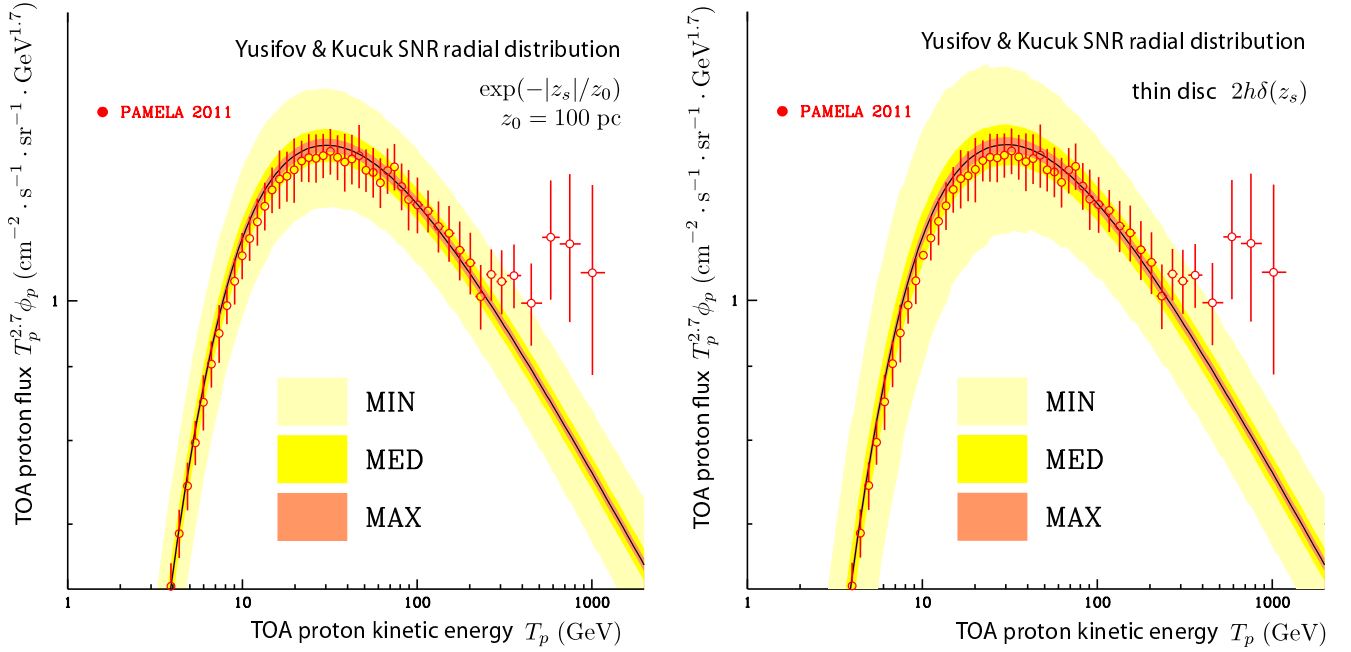


FIGURE 7.13: Flux moyen (courbes noires) et les enveloppes représentant l'écart-type du flux, pour les modèles min, med et max de propagation, le tout pour une distribution exponentielle de sources selon z (à gauche) et pour un disque infiniment mince (à droite), pour $\nu = 3 \text{ century}^{-1}$.

Pour étudier l'influence d'un taux d'explosion local de sources différent du taux d'explosion global de la galaxie, nous avons calculé sur la figure 7.14 des flux obtenus dans les modèles min, med et max et avec un taux global de supernovæ descendu à $\nu = 1 \text{ siècle}^{-1}$ (soit trois fois moins haut que le taux local). La bande d'erreurs correspond à la variance provenant des erreurs de mesures. On peut voir qu'il est possible que cette explication nous permette d'expliquer l'excès de protons observé par CREAM et PAMELA, et c'est ce que nous traitons dans le chapitre suivant.

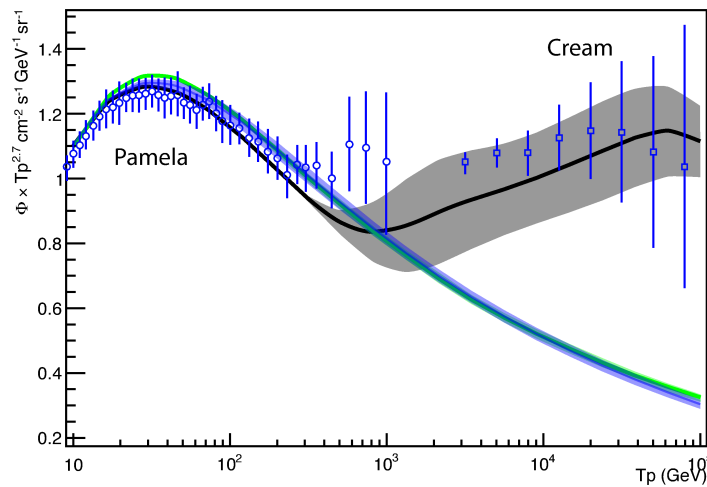


FIGURE 7.14: Les bandes indiquent l'écart-type du flux associé aux erreurs systématiques du catalogue (âges et distances des sources), pour les modèles min, med et max. Les courbes montrent le flux total, issu de toutes les sources (catalogue plus sources aléatoires). Les bandes sont les mêmes que dans la figure 7.11.

RÉFÉRENCES

- Adriani, O., Barbarino, G. C., Bazilevskaya, G. A., et al. 2011, *Science*, 332, 69
- Blasi, P. & Amato, E. 2011, *JCAP*
- Delahaye, T., Laval, J., Lineros, R., Donato, F., & Fornengo, N. 2010, *A&A*, 524, 51
- Durand, E. 1966, *Électrostatique Tome II Problèmes généraux, conducteurs* (Paris Masson)
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Jeffrey, A., & Zwillinger, D. 2007, *Table of Integrals, Series, and Products*
- Green, D. A. 2009, *BAS*, 37, 45
- Manchester, R. N., Hobbs, G. B., Teoh, A., & Hobbs, M. 2005, *VizieR Online Data Catalog*, 7245, 0
- Mertsch, P. 2011, *JCAP*, 02, 031
- Nolan, J. P. 2010, Robust Analysis Inc, <http://www.robustanalysis.com/>
- Nolan, J. P. 2013, *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data* (Boston : Birkhauser), in progress, Chapter 1 online at academic2.american.edu/~jpnolan
- Uchaikin, Vladimir, & Zolotarev. 2011, *Chance and stability stable distributions and their applications* (Berlin [u.a.] : de Gruyter)
- Yoon, Y. S., Ahn, H. S., Allison, P. S., et al. 2011, *ApJ*, 728, 122

La section précédente nous a montré l'importance de s'intéresser au taux d'explosions de supernovæ dans la galaxie. Dans cette section nous allons considérer que ce taux d'explosions est fixé pour les sources locales, il nous est imposé par le catalogue, mais à partir de maintenant il sera un paramètre libre pour les sources extérieures. En effet nous venons d'étudier leur dispersion statistique et nous avons montré que cette dernière ne permet pas d'expliquer un nombre local de supernovæ élevé. Cependant nous n'avons pas pris en compte de possibles explosions en chaîne (nous avons considéré des sources indépendantes les unes des autres), phénomène qui justifie pourtant la présence de superbulles dans la galaxie. D'autre part, nous n'avons pas considéré les bras spiraux dans la détermination du taux d'explosions, notamment le fait que nous sommes situés sur le bras d'Orion, qui est un petit morceau de bras spiral de la galaxie. Ces arguments peuvent jouer en faveur de l'existence d'un taux d'explosions local plus important que le taux général dans la galaxie.

Nous allons poursuivre la méthodologie développée au chapitre précédent et étudier un flux de la forme $\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{loc}} + \Phi_{\text{ext}}$. Nous avons vu que dans ce contexte, en choisissant un taux d'explosion local, il est possible d'introduire une brisure de pente. Pour essayer de trouver des jeux de paramètres nous permettant de briser cette pente nous allons effectuer des tests de χ^2 en essayant un grand nombre de paramètres de propagation. Nous verrons alors qu'il existe effectivement des paramètres permettant de retrouver le flux de protons et le flux d'héliums. Nous détaillons cette étude dans ce chapitre.

1 MÉTHODE

Notre modèle contient des paramètres libres : les paramètres de propagation. Aussi, pour pouvoir trouver des paramètres nous permettant d'expliquer les anomalies observées par CREAM et PAMELA nous n'avons en fait qu'à scanner un espace de paramètres en essayant de retrouver les flux de protons et d'héliums observés par les deux expériences. Dans un premier temps, on construit cet espace de paramètres à partir de tous les paramètres de propagation : les deux paramètres du coefficient de diffusion δ et D_0 , l'indice spectral du terme source α , la hauteur du halo diffusif L et enfin l'amplitude du vent convectif V_c . D'autre part il nous faut ajouter à ces variables le taux d'explosion dans la galaxie ν . Nous devons également intégrer le taux d'injection de chaque espèce dans la galaxie Q_0 , où l'indice i désigne l'espèce considérée.

Il existe une légère dispersion de l'indice spectral entre le spectre d'héliums et le spectre de protons. Depuis le début nous avons basé nos travaux sur une valeur fixe de δ , l'indice spectral consacré

à la propagation. Pour poursuivre dans cette idée nous imposerons la même valeur de δ pour les protons et les héliums. Cependant pour s’assurer de pouvoir trouver des indices spectraux différents pour les deux espèces nous autoriserons une légère dispersion des valeurs de α (l’indice spectral d’accélération) de chacune des deux espèces.

Pour avoir une estimation statistique de l’écart d’un jeu de paramètres donné avec les observations, la méthode consiste à faire varier ces paramètres et à calculer la valeur de χ^2 pour chaque espèce, avec

$$\chi^2 = \sum_{\text{energie}_i} \frac{(\Phi_{\text{theo}_i} - \Phi_{\text{exp}_i})^2}{\sigma_i^2}$$

Cette méthode nous permet de vérifier qu’il existe des zones dans l’espace des phases nous permettant d’obtenir des χ^2/ndof autour de 1.

Ensuite, il faut s’assurer que la région de l’espace de paramètres trouvée avec ces méthodes soit compatible avec celle obtenue dans les études précédentes de propagation, particulièrement les études sur le B/C. En effet, nous avons vu dans la section 3 (page 144) que ces études ont permis de contraindre les valeurs de δ , K_0 , L et V_c .

2 PREMIÈRE ÉTUDE

La première étude est un scan brutal de l’espace des phases, pour essayer d’ajuster les flux expérimentaux. Cette étude est longue à mettre en œuvre car elle met en jeu 7 paramètres libres, ce qui présage un scan d’espace de paramètres assez long. C’est pourquoi, encore une fois nous allons utiliser les propriétés du propageur pour alléger ce temps de calcul. Dans un premier temps nous concentrons l’étude sur des énergies supérieures à 50 GeV. Pour une grande majorité de jeux de paramètres, nous avons vu qu’à de telles énergies, l’équation de diffusion est en régime purement diffusif, c’est-à-dire que les flux sont très peu sensibles à certains des effets, comme les spallations et le vent convectif, et donc aux paramètres associés à ces effets, comme la vitesse du vent de convection V_c . Il est donc inutile de chercher V_c dans cette région. D’autre part, on choisit de fixer Q_{0_i} de sorte à imposer au flux théorique de s’ajuster sur le flux observé à 50 GeV. On s’assure ainsi que le premier point de mesure soit toujours correct et on s’affranchit de l’étude de Q_{0_i} . Pour finir $\alpha + \delta$ correspond à la pente du flux moyen en régime purement diffusif, avec des sources en loi de puissance en énergie. Les spectres sont des lois de puissance avec un indice spectral $\alpha + \delta$. Entre 50 GeV et 100 GeV la contribution des sources du catalogue est dans la grande majorité des cas sous-dominante, c’est donc la valeur moyenne du flux extérieur qui domine. Dans ce contexte, la pente du flux entre 50 GeV et 100 GeV contraint entièrement la somme $(\alpha + \delta)$. Il ne reste finalement qu’à scanner les paramètres δ ,

K_0 , L et ν , avec les flux d'héliums et de protons de CREAM et PAMELA. Les résultats sont constitués de jeux de 4 paramètres permettant de créer des flux compatibles avec les flux observés.

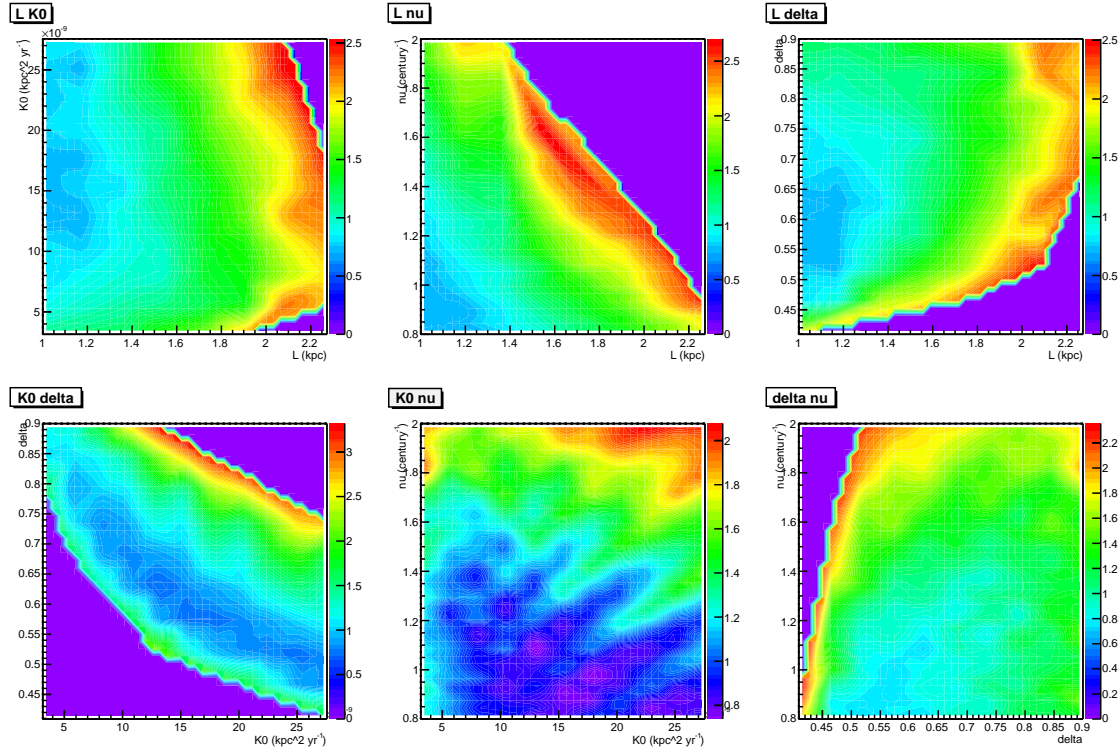


FIGURE 8.1: Meilleures valeurs de $\frac{\chi^2}{\text{ndof}}$ pour chaque couple de paramètres. Pour chaque couple de paramètres on ne représente que le meilleur χ^2 , c'est pourquoi il peut apparaître en première instance des solutions multiples, il s'agit en fait de solution avec des paramètres peu physiques. Les valeurs de ν représentés ont été tronqués car des valeurs plus élevées engendrent des tailles de halo inférieures à 1 kpc.

Pour interpréter ces résultats, on représente sur la figure 8.1 les couples de paramètres en fonction de la meilleure valeur de χ^2/ndof pour chacun de ces couples. Premièrement, on voit qu'il existe donc des zones pour lesquelles il existe un $\chi^2/\text{ndof} \sim 1$, ce qui veut dire que le modèle est compatible avec le flux de protons observé. D'autre part, une telle figure permet de montrer la sensibilité du modèle aux différents paramètres.

On voit par exemple que le modèle impose une faible valeur pour la somme du couple $L + \nu$. C'est en fait le cœur de tout ce modèle : pour créer une brisure de pente, il faut pouvoir générer un flux suffisamment important après 120 GeV pour dominer le flux de la galaxie et créer une brisure. Nous avons vu qu'au-delà de 100 GeV, le flux est dominé par les sources jeunes et proches, ce qui veut dire que si on veut recréer une brisure de pente il faut assurer un flux suffisamment important pour les sources jeunes et proches. Pour cela il existe essentiellement deux méthodes. Premièrement une petite hauteur de halo L favorise l'échappement des cosmiques par les bords verticaux, ce qui dope le flux

local puisque le flux lointain s’échappe avant d’atteindre le Système solaire. L’autre méthode est de baisser le taux de supernovæ dans la galaxie, en effet le taux local est fixe et donné par le catalogue, donc baisser le taux de la galaxie revient à faire ressortir la zone locale. Voilà pourquoi dans notre hypothèse les modèles favorisés sont ceux à petit $L + \nu$. Ce scan présente une zone importante de l’espace des phases permettant de retrouver les flux expérimentaux. Il n’est pas étonnant de pouvoir retrouver ces flux étant donné le nombre de paramètres libres en entrée. Pour essayer de renforcer la pertinence scientifique de l’étude, nous allons maintenant contraindre encore cet espace des phases en combinant le test de flux de protons et d’héliums avec les études théoriques faites sur les paramètres de propagation à partir du B/C.

3 COMPATIBILITÉ AVEC LE B/C

Dans cette section, nous effectuons un nouveau test de χ^2 en restreignant l’espace de paramètres à tous les jeux de paramètres compatibles avec les études de (Maurin et al. 2001) sur le B/C. Cette étude se porte sur δ , K_0 , L et V_C . Les travaux ont dégagé 1600 jeux de paramètres compatibles avec le B/C, qui ne sont alors pour nous, plus considérés comme des paramètres libres. Il ne nous reste alors plus comme paramètres libres que q_p^0 , q_{He}^0 , α_p , α_{He} et ν . De plus, pour limiter le nombre de paramètres, on se place dans un régime de diffusion où de nombreux effets peuvent être négligés (voir section 2). On se placera donc au-delà de 50 GeV où le vent convectif et la spallation ont un rôle négligeable. Pour finir on cherche à minimiser le χ^2/ndof total c’est-à-dire

$$\chi_{tot}^2 = \chi_p^2 + \chi_{He}^2.$$

Les valeurs de χ^2 n’ont pas la même dépendance vis-à-vis de chaque paramètre, aussi il se trouve qu’on peut réaliser une partie du travail de minimisation de manière analytique. Le jeu d’équations correspondant est le suivant

$$\frac{\partial \chi_{tot}^2}{\partial q_p^0} = 0, \frac{\partial \chi_{tot}^2}{\partial q_{He}^0} = 0, \frac{\partial \chi_{tot}^2}{\partial \alpha_p} = 0, \frac{\partial \chi_{tot}^2}{\partial \alpha_{He}} = 0, \frac{\partial \chi_{tot}^2}{\partial \nu} = 0, \quad (8.1)$$

La résolution analytique de ce système nous permet d’obtenir immédiatement les valeurs attendues des paramètres. Cependant, ce système possède des solutions simples uniquement pour les paramètres qui interviennent linéairement dans la quantité à minimiser. Aussi, dans notre cas, nous n’utiliserons que les équations sur q^0 , car ce sont les seules possédant cette propriété.

Calcul des coefficients q^0

Pour la résolution, on réécrit les flux pour une énergie E_i donnée en faisant apparaître explicitement les paramètres

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_p^i \rangle &= A_p^i \nu q_p^0 R^{\alpha_p} \langle G_p^i \rangle \\
 \Phi_{p\ cat}^i &= B_p^i q_p^0 R^{\alpha_p} \sum_{n\ sources} G_p^{i,n} \\
 \langle \Phi_{He}^i \rangle &= A_{He}^i \nu q_p^0 R^{\alpha_{He}} \langle G_{He}^i \rangle \\
 \Phi_{He\ cat}^i &= B_{He}^i q_p^0 R^{\alpha_{He}} \sum_{n\ sources} G_{He}^{i,n}
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

où $A_{\text{espèce}}^i$ et $B_{\text{espèce}}^i$ sont des constantes. On a :

$$\frac{\partial \chi_{tot}^2}{\partial q_p^0} = 0 \tag{8.3}$$

$$\frac{\partial \chi_p^2}{\partial q_p^0} = \sum_{i\ \text{énergie}} \frac{\partial}{\partial q_p^0} \left(\frac{(\Phi_{exp}^i - (\langle \Phi_p^i \rangle + \Phi_{p\ cat}^i))^2}{(\sigma_p^i)^2} \right) \tag{8.4}$$

Car $\partial \chi_{He}^2 / \partial q_p^0 = 0$.

En utilisant la paramétrisation 8.2 on obtient :

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial q_p^0} \left(\frac{(\Phi_{exp}^i - q_p^0 M_p^i)^2}{(\sigma_p^i)^2} \right) = 0 \tag{8.5}$$

avec

$$M_p^i = A_p^i \nu R^{\alpha_p} \langle G_p^i \rangle + B_p^i R^{\alpha_p} \sum_{n\ sources} G_p^{i,n} \tag{8.6}$$

qui conduit à

$$\sum_i 2 \frac{(\Phi_{exp}^i - q_p^0 M_p^i) q_p^0 M_p^i}{(\sigma_p^i)^2} = 0 \tag{8.7}$$

et donc

$$q_p^0 = \frac{\sum_i \Phi_{exp}^i M_p^i / (\sigma_p^i)^2}{\sum_j (M_p^j)^2 / (\sigma_p^j)^2} \quad (8.8)$$

Le calcul est le même pour q_{He}^0 .

Les coefficients q^0 sont donnés directement par :

$$q_p^0 = \frac{\sum_i \Phi_{exp}^i \left(A_p^i \nu R^{\alpha_p} \langle G_p^i \rangle + B_p^i R^{\alpha_p} \sum_{n \text{ sources}} G_p^{i,n} \right) / (\sigma_p^i)^2}{\sum_j \left(A_p^j \nu R^{\alpha_p} \langle G_p^j \rangle + B_p^j R^{\alpha_p} \sum_{n \text{ sources}} G_p^{j,n} \right)^2 / (\sigma_p^j)^2} \quad (8.9)$$

$$q_{He}^0 = \frac{\sum_i \Phi_{exp}^i \left(A_{He}^i \nu R^{\alpha_{He}} \langle G_{He}^i \rangle + B_{He}^i R^{\alpha_{He}} \sum_{n \text{ sources}} G_{He}^{i,n} \right) / (\sigma_{He}^i)^2}{\sum_j \left(A_{He}^j \nu R^{\alpha_{He}} \langle G_{He}^j \rangle + B_{He}^j R^{\alpha_{He}} \sum_{n \text{ sources}} G_{He}^{j,n} \right)^2 / (\sigma_{He}^j)^2}$$

Aussi ces valeurs d’injection de rayons cosmiques sont normalisées analytiquement aux flux observés pour obtenir le meilleur ajustement possible. Notons à toutes fins utiles qu’il s’agit ici d’une très bonne méthode de normalisation théorique du flux, il n’est normalisé ni à une paramétrisation pré-existante ni sur un seul point expérimental. Et il s’agit bien ici d’une méthode qui permet de trouver un flux le plus proche possible de tous les points expérimentaux.

Dans un premier temps, le scan de l’espace des phases est réalisé en faisant varier les taux d’explosions ν de 0.5 à 3.5 par siècle, et les valeurs de α_p et α_{He} de 1.75 à 2.35, pour garder des valeurs cohérentes avec la littérature.

model	K_0 [kpc ² /yr]	δ	L [kpc]	V_c [kpc/yr]	q_p^0 [GeV ⁻¹]	q_{He}^0 [(GeV/n) ⁻¹]
A	2.4×10^{-9}	0.85	1.5	1.38×10^{-8}	1.17×10^{52}	3.22×10^{51}
B	2.4×10^{-9}	0.85	1.5	1.38×10^{-8}	0.53×10^{52}	1.06×10^{51}
MED	1.12×10^{-9}	0.7	4	1.23×10^{-8}	15.8×10^{51}	3.14×10^{51}
model	$\alpha_p + \delta$	$\alpha_{He} + \delta$	ν [century ⁻¹]	H injection	He injection	χ^2/dof
A	2.9	2.8	0.8	0.19	0.05	0.61
B	2.85	2.7	1.4	0.12	0.07	1.09
MED	2.85	2.7	0.8	0.148	0.07	1.3

TABLE 8.1: Jeux de paramètres compatibles avec le B/C et permettant de retrouver les flux de protons et d’héliums

Le test nous donne des jeux de paramètres compatibles avec le B/C et qui gardent un accord correct avec les données, ils sont donnés dans la table 8.1. Comme attendu, les jeux de données favorisés ont de petites tailles de halo L et de petites injections ν ce qui privilégie l'effet des sources locales et donc une brisure de pente. Les flux correspondant à 8.1 sont tracés sur les figures 8.2.

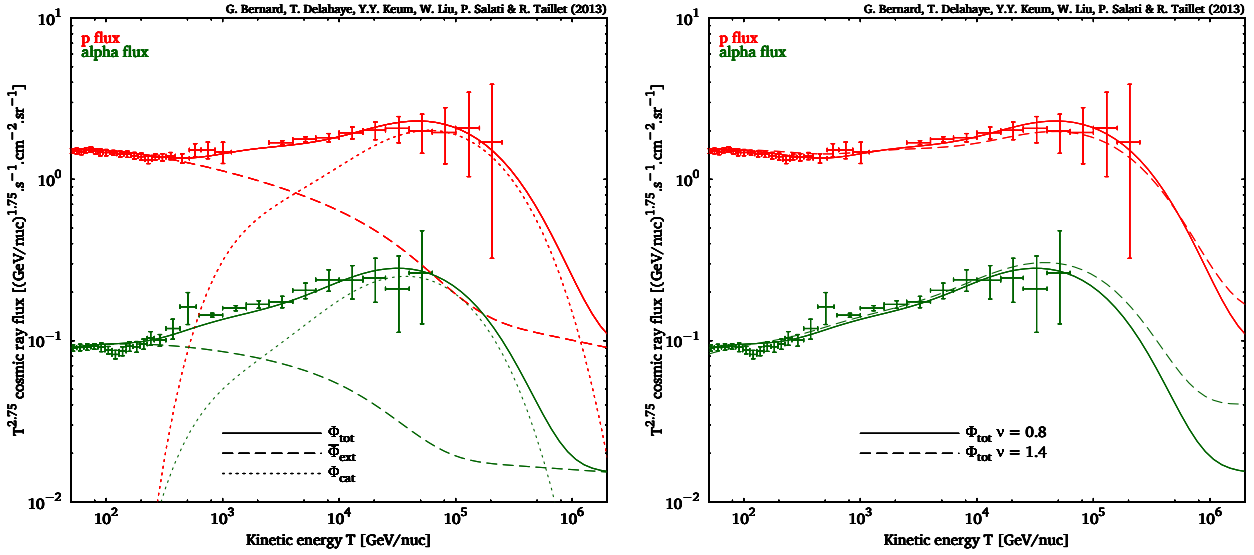


FIGURE 8.2: À gauche : best fit obtenu avec le prior $\nu > 0.8$. À droite : comparaisons entre les best fit obtenus avec comme prior $\nu > 0.8$ (en trait plein) et ($\nu > 1.4$ en pointillés)

On retrouve un accord correct plutôt encourageant pour appuyer l'existence d'une brisure de pente due aux sources locales. Cependant certaines réserves sont à émettre. On constate à haute énergie (autour du TeV) une chute importante du spectre. C'est un effet essentiellement statistique : les résultats du test de χ^2 forcent les modèles passant le plus proche des points de mesure. Le dernier point de mesure de CREAM malgré ses grandes barres d'erreur signale une tendance décroissante. Notre test statistique va donc privilégier les modèles avec la même tendance. D'autre part, ces jeux de paramètres sont tous obtenus pour de petites valeurs de L . En effet, comme il a déjà été mentionné, plus le halo magnétique est fin, plus l'échappement est important donc plus le flux de rayons cosmiques est dominé par le flux local. Dans ce cas le nombre de sources N qui contribuent au signal total est faible et par conséquent pour rattraper ce phénomène et se reconnecter avec la courbe expérimentale, le taux d'injection q^0 par source sera élevé. Par conséquence ici, comme L est petit, la contribution de Φ_{cat} n'est plus noyée dans le flux total, mais contribue significativement. C'est un problème car certaines études en rayons gamma et en émission synchrotron diffuse semblent favoriser des halos de grand L .

Pour essayer de réduire cet effet, nous avons également procédé à une autre analyse. En partant du jeu de paramètres MED, nous avons fait varier les positions et âges des sources du catalogue (moyennant les incertitudes d'observations), et nous avons relevé le flux nous permettant d'obtenir le meilleur χ^2/ndof . Le meilleur χ^2 obtenu est tracé sur la figure 8.3. L'accord avec les données

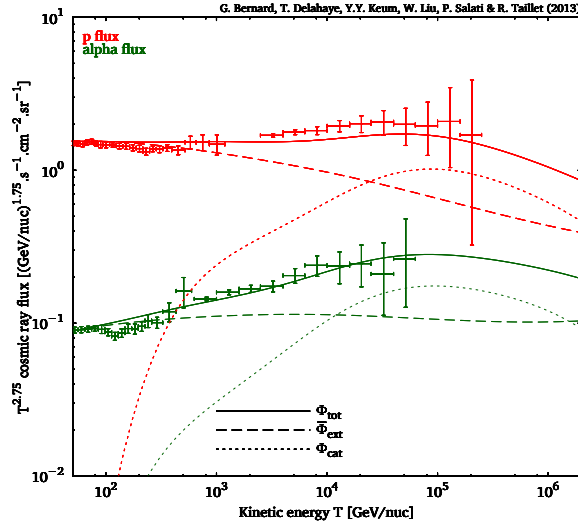


FIGURE 8.3: Best fit obtenu avec le jeu de paramètres MED, en ayant fait varier les âges et positions des sources

de CREAM et PAMELA reste raisonnable et la discussion des résultats oppose moins de contre-arguments.

Pour améliorer cette étude et essayer de se débarrasser du problème du petit halo, il peut être intéressant d’affiner cette analyse en prenant en compte la présence des bras spiraux ainsi qu’une injection plus réaliste de rayons cosmiques. En ce qui concerne les bras spiraux, les premiers tests menés par un collaborateur ([Liu 2013](#)) tendent à montrer que ces modèles permettent de plus grand halos (voir figure 8.4). Cependant les meilleurs χ^2 obtenus suggèrent pour l’instant des halos de 3 kpc, ce qui reste légèrement en dessous du modèle MED. Ajoutons que cette étude ne prend pas en compte la présence du bras local d’Orion, ce qui pourrait encore permettre de trouver des halos plus grands.

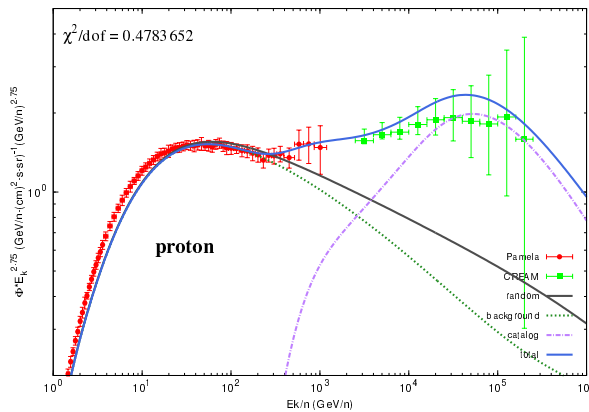


FIGURE 8.4: Best fit obtenu pour hauteur de halo de 3 kpc ([Liu 2013](#))

Pour aller encore plus loin il est possible de ne plus considérer les supernovæ comme des événements instantanés et ponctuels. De plus l'injection se passe sur un vestige qui a tendance à avoir une forme sphérique d'un rayon variant de 5 à 100 pc. Le fait de prendre en compte une architecture plus détaillée de la source aurait de grandes chances de changer la contribution du catalogue Φ_{cat} . Ce type d'injection présente des discontinuités dans le spectre des sources locales, c'est pourquoi dans un modèle qui renforce l'importance de ces sources, le spectre calculé présente de nombreuses fluctuations.

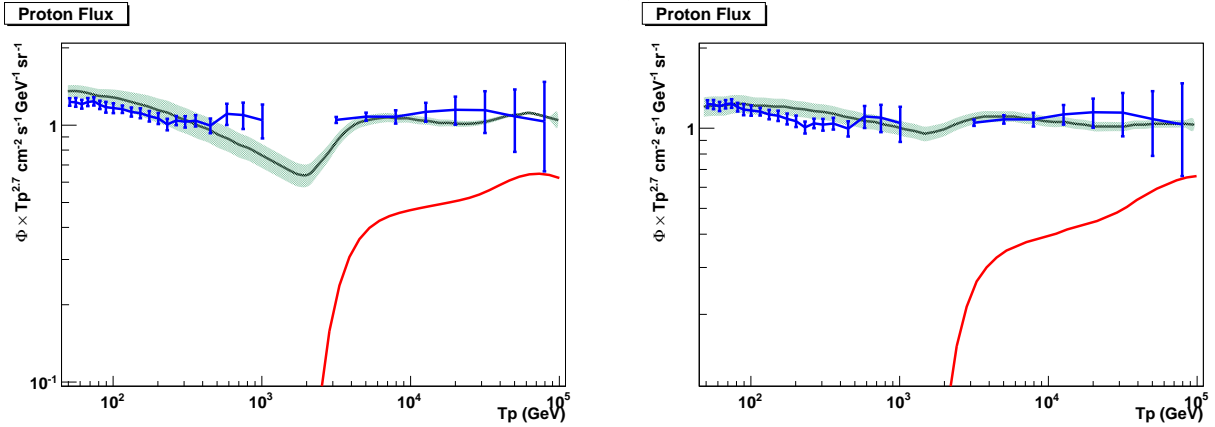


FIGURE 8.5: À gauche : résultats obtenus avec les paramètres du best fit , à droite résultats obtenus dans le modèle MED. En bleu les points de mesure de PAMELA et CREAM. En rouge le flux provenant des sources du catalogue, en vert le flux total calculé avec une injection continue de sources.

Sur la figure 8.5 nous avons calculé le flux obtenu dans le cadre de notre modèle avec ce type d'injection, pour un set de paramètres typiques (voir (Blasi & Amato 2011)). Premièrement il ressort que de petites valeurs de L et de ν font apparaître des brisures beaucoup trop importantes dans le flux, deuxièmement on constate que les fluctuations statistiques provenant du flux extérieur sont plus importantes que dans le cadre d'une injection ponctuelle. Cependant, en augmentant L et ν , ces effets sont considérablement réduits. En utilisant le catalogue dans le modèle MED avec une valeur de ν de 1.4 SNR par an on obtient un meilleur accord avec les expériences (voir figure 8.5). Un test statistique plus complet a été effectué par (Thoudam & Hörandel 2012) en faisant varier les paramètres d'injection de ce modèle d'accélération (voir figure 8.6). Cette étude menée sur un catalogue beaucoup moins important présente plus de fluctuations statistiques. Cependant le meilleur modèle obtenu est optimiste et présente un bon accord avec les observations avec une hauteur de halo de 5 kpc.

Nous constatons aussi que notre modèle nécessite de petites valeurs du taux d'explosions ν . Les valeurs obtenues dans nos tests sont assez proches de la limite inférieure donnée par les observations de supernovæ et en désaccord avec les observations de pulsars. Ce problème semble plus difficile à contourner et sera discuté dans la partie suivante dans le cadre de l'anisotropie.

Cette étude a permis de dégager une explication à la brisure de pente dans le spectre du flux de protons et d’héliums, néanmoins nous avons vu qu’il était difficile de la réconcilier avec les dernières mesures de hauteur de halo. Notons tout de même une hypothèse évoquée dans la première partie, il est possible que le halo diffusif ne fasse pas la même taille partout dans la galaxie, ou encore qu’une différence entre un coefficient de diffusion perpendiculaire au plan galactique et parallèle au plan galactique conduisent à des tailles de halo erronées, c’est pourquoi nous ne rejetons pas ce modèle et pensons le soumettre à d’autres tests, tels que le calcul du flux de γ attendu dans la galaxie avec ce modèle ainsi que le flux d’électrons et de positons.

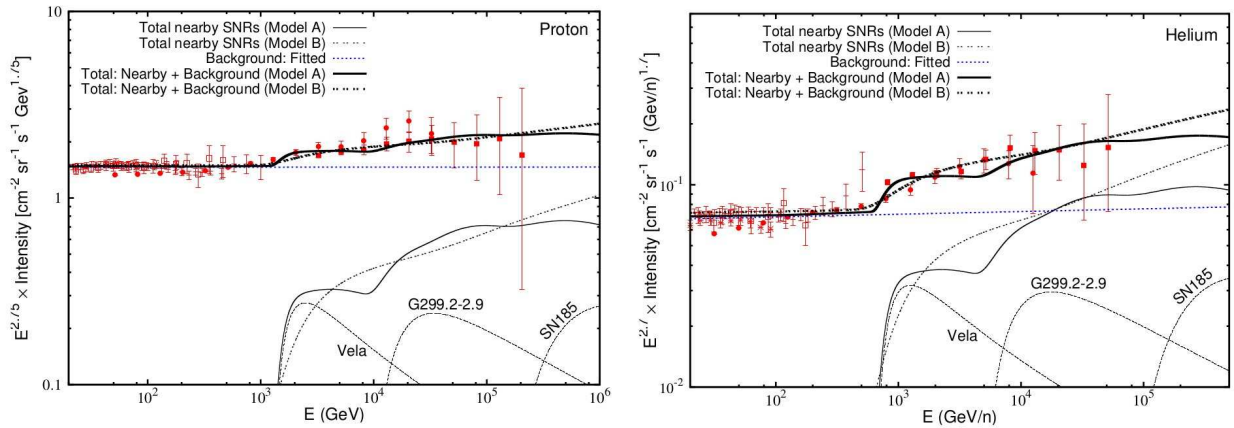


FIGURE 8.6: Best fit des modèles d’injections des modèles de (Thoudam & Hörandel 2012)

Nous allons maintenant nous intéresser plus en détails à une autre observable : l’anisotropie, beaucoup plus sensible à δ , qui nous permettra aussi de tester notre modèle plus en détails.

RÉFÉRENCES

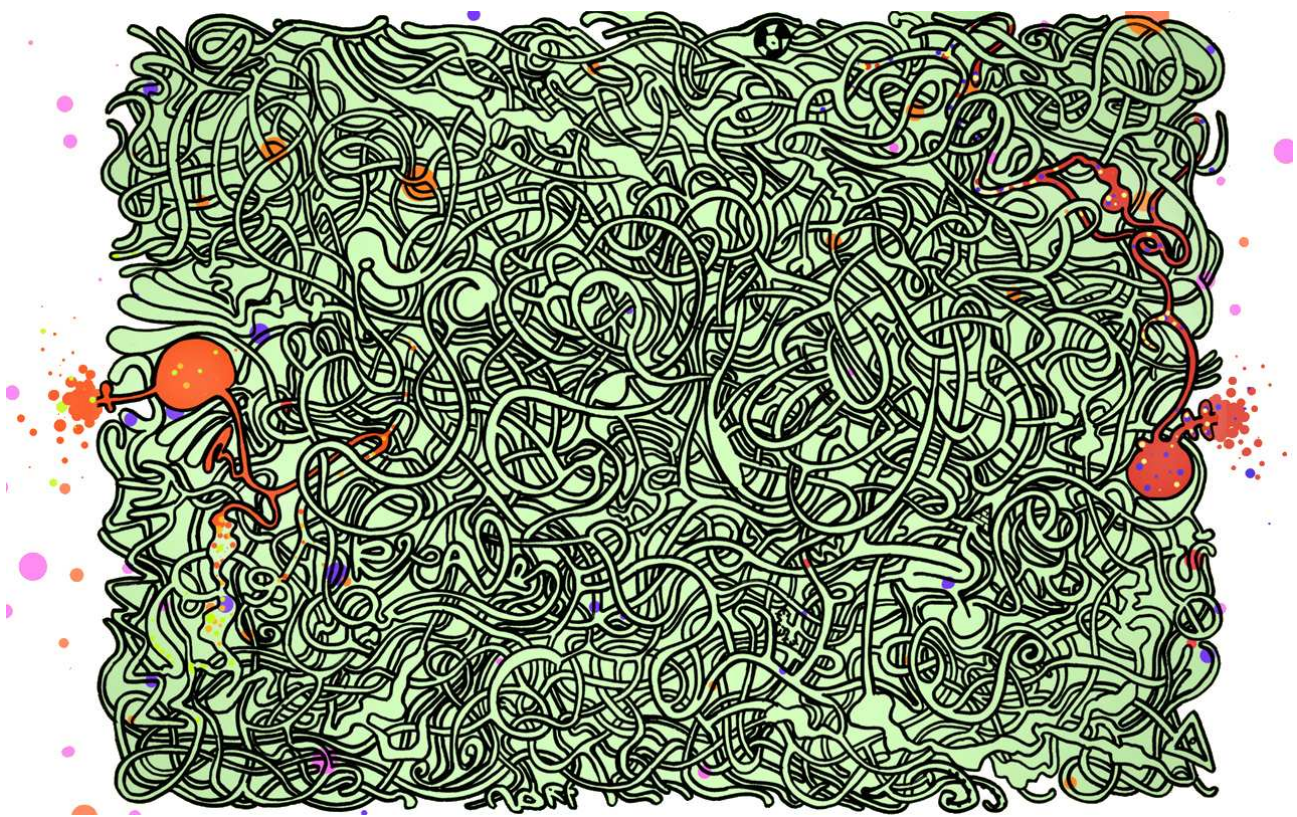
Blasi, P. & Amato, E. 2011, JCAP

Liu, W. 2013, En preparation

Maurin, D., Donato, F., Taillet, R., & Salati, P. 2001, ApJ, 555, 585

Thoudam, S. & Hörandel, J. R. 2012, MNRAS, 421, 1209

TROISIÈME PARTIE :



L'ANISOTROPIE DES PROTONS COSMIQUES GALACTIQUES

La propagation diffusive du rayonnement cosmique est un phénomène irréversible qui uniformise le flux de rayonnement cosmique. Les interactions avec le champ magnétique galactique font perdre aux particules cosmiques les informations sur leur direction d'origine. C'est pourquoi on peut s'attendre à observer un signal isotrope au niveau du Système solaire. Cependant les premiers calculs de rayons cosmiques ont été accompagnés de prédictions sur l'existence d'une anisotropie. Ainsi dans les calculs de (Berezinskii & Ginzburg 1990) par exemple, on retrouve les formules les plus utilisées pour évaluer l'anisotropie. De tels calculs prédisent souvent des anisotropies provenant des distributions de sources non uniformes dans la galaxie. Le choix de l'expression des distributions de sources se révèle donc important. Les premières conclusions suggéraient des fluctuations relatives très faibles dans le signal, de l'ordre de 10^{-4} autour de la valeur moyenne vers une centaine de GeV, au dessous du seuil de mesures des expériences satellites. C'est pourquoi pendant longtemps cette observable n'a pas été considérée. Cependant nous verrons que des méthodes de mesures au sol ont été développées, permettant de réduire les erreurs systématiques et ainsi détecter des variations suffisamment faibles du signal attendu. Ces méthodes ne sont applicables qu'au sol c'est pourquoi les expériences satellites n'ont pour le moment pas de vraies mesures d'anisotropies mais uniquement des limites. Il n'existe pas encore d'explication théorique satisfaisante permettant de reproduire l'anisotropie observée à toutes les énergies ainsi que sa phase (c'est-à-dire la direction vers laquelle pointe le maximum du signal dans le ciel).

Il peut exister plusieurs sources d'anisotropie, issues par exemple, d'un excès de sources dans une direction, du mouvement de la Terre dans la galaxie, des effets de la turbulence magnétique ou encore de l'effet de l'héliosphère. Nous verrons qu'à chacun de ces effets est associée une échelle spatiale ou temporelle caractéristique. Dans cette thèse nous développerons l'anisotropie de grande échelle sur des temps sidéraux. Nous appliquerons les modèles développés dans la première partie pour essayer de prédire la valeur moyenne de l'anisotropie, sa variance et conclure sur les contraintes applicables aux paramètres de propagation. Nous verrons également l'influence de l'environnement local sur cette variable.

Dans cette première partie, nous présenterons la définition formelle de l'anisotropie, le formalisme mathématique pour la calculer mais aussi les méthodes de mesure associées à cette observable. On commence ici par redéfinir formellement l'anisotropie dipolaire telle qu'elle est utilisée dans la littérature. Nous discuterons également les limites théoriques de ces définitions et nous verrons comment les améliorer.

Dans le rayonnement cosmique au GeV et au TeV, le mot anisotropie désigne très souvent implicitement l'anisotropie dipolaire : l'anisotropie dipolaire d'un signal représente l'excès relatif de ce signal par rapport à sa valeur moyenne dans une direction donnée. À une dimension, si on considère

l'angle ϕ pour décrire cette direction, on a

$$N = \langle N \rangle (1 + \delta_{dip} \cos(\phi - \phi_0)) \quad (9.1)$$

On appelle δ_{dip} l'amplitude de l'anisotropie dipolaire et ϕ_0 sa phase. L'anisotropie dipolaire ne peut donc pas être décrite par une seule variable qui exprimerait cet excès (ici δ_{dip}), il faut aussi indiquer la direction de cet excès (ici ϕ_0). C'est pourquoi le plus utile pour décrire l'anisotropie est d'utiliser un vecteur.

Pour être plus précis dans la définition de l'anisotropie nous allons la généraliser à l'aide des harmoniques sphériques : elles constituent une base qui permet de développer toute fonction en coordonnées sphériques. Le rang zéro de ce développement décrit la valeur moyenne du signal, le rang 1 décrit une variation dipolaire autour du signal moyen (et donc l'anisotropie dipolaire), le rang 2 une variation quadripolaire etc. Les expériences et les calculs déjà existants en anisotropie s'arrêtent au rang 1 de ce développement, pour plusieurs raisons :

- Il est assez simple de relier l'expression théorique du flux au rang 1 des harmoniques sphériques.
- Les signaux observés en protons cosmiques autour du GeV / TeV présentent un signal dipolaire.
- Quand le rang augmente, les échelles spatiales associées sont plus petites, il faut souvent plus de précision, c'est pourquoi observer le quadripôle au GeV/TeV demande beaucoup de précision.

Nous verrons les limites d'une description purement dipolaire.

Pour décrire l'anisotropie dans le formalisme des harmoniques sphériques, commençons par décrire ce que l'on appelle la sphère de dernière diffusion.

1 EXPRESSIONS ANALYTIQUES DE L'ANISOTROPIE

1.1 La sphère de dernière diffusion

Les rayons cosmiques sont soumis à un mouvement diffusif : on considère que chaque cosmique détecté sur Terre provient en ligne droite de son dernier centre diffuseur. En un point donné de l'espace, il existe un ensemble de centres diffuseurs d'où peuvent provenir les rayons cosmiques. On appelle cet ensemble la surface de dernière diffusion. Dans le cadre d'un modèle de diffusion homogène et isotrope cette surface est une sphère de rayon moyen λ (le libre parcours moyen). Dans ce formalisme, la carte du ciel représentant le flux de rayonnement cosmique que nous observons correspond en fait au flux de rayons cosmiques calculé sur cette surface de dernière diffusion. Pour tracer nos cartes d'anisotropie, on calculera donc le flux à la surface de cette sphère de dernière diffusion. Cette carte est décrite par des coordonnées sphériques : on peut exprimer ce système de coordonnées à partir du

centre galactique et de la position du Système solaire. Cette position est définie sur la figure 9.1.

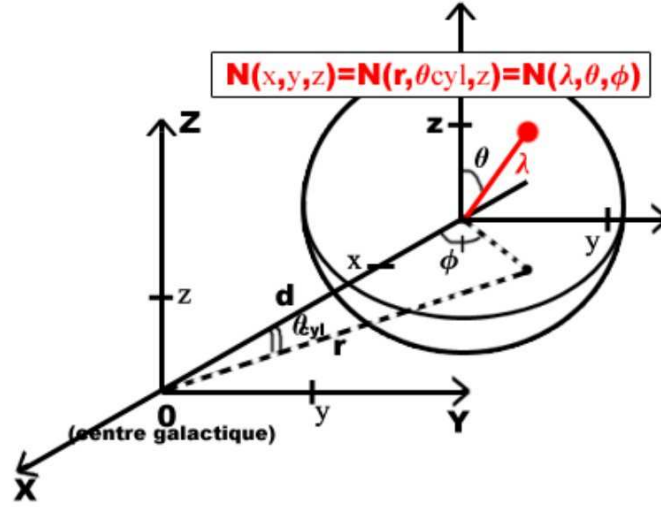


FIGURE 9.1: Sphère sur laquelle le flux est calculé pour la détermination de l'anisotropie

Dans le formalisme de la diffusion, le libre parcours moyen est relié au coefficient de diffusion par l'expression

$$\lambda = 3 D / v.$$

Cette distance correspond au rayon de la sphère de dernière diffusion, il est donc d'autant plus grand que D est grand, et donc que l'énergie est importante.

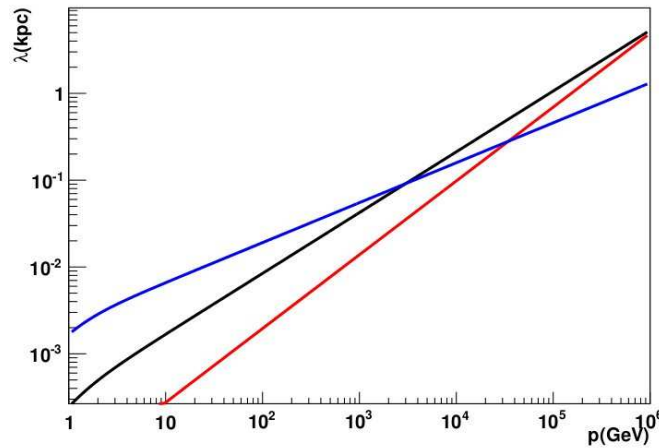


FIGURE 9.2: Valeur du libre parcours moyen pour les modèles min(rouge) ,med(noir) et max(bleu)

On trace sur la figure 9.2, pour les trois modèles min, med et max la valeur de λ en fonction de l'énergie. La source de rayons cosmiques la plus proche que l'on observe se situe à 0.1 kpc du

Système solaire. Au-delà d'une dizaine de TeV cette source va se situer à l'intérieur de la sphère de dernière diffusion. On peut avoir tendance à penser que cette situation est assez problématique car la source devrait être extrêmement brillante dans le ciel et donc visible sur les cartes expérimentales d'anisotropie mais nous verrons dans le chapitre 11 qu'en considérant des modèles non stationnaires où les sources explosent ponctuellement dans la galaxie ce problème disparaît après l'explosion de la source.

Nous allons donc calculer le flux de rayons cosmiques sur la sphère de dernière diffusion de rayon λ centrée sur la Terre. Ce signal sera ensuite traité avec les harmoniques sphériques. C'est ce que nous ferons dans la section suivante.

1.2 Rappel sur les harmoniques sphériques

Soit $f(\theta, \phi)$ un signal à symétrie sphérique, il peut être décomposé sur une base d'harmoniques sphériques suivant :

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} C_{\ell,m} Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (9.2)$$

Les fonctions $Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$ décrivent les harmoniques sphériques. Les coefficients $C_{\ell,m}$ sont les coefficients du développement en harmoniques sphériques. Ils sont obtenus en utilisant les relations de fermeture de la base des harmoniques sphériques.

$$\begin{cases} Y_{\ell}^m = (-1)^{\ell} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{d(\cos \theta)^{\ell+m}} (\cos^2 \theta - 1)^{\ell} \\ C_{\ell,m} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} d\Omega f(\theta, \phi) Y_{\ell}^{m*} \end{cases} \quad (9.3)$$

Tout calculs faits, on trouve pour les premiers ordres des harmoniques :

$$\begin{aligned} Y_0^0(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \\ Y_1^{-1}(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \\ Y_1^0(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta \\ Y_1^1(\theta, \phi) &= \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \\ Y_2^0(\theta, \phi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned} \quad (9.4)$$

Ici nous n'indiquons pas les ordres supérieurs car nous verrons plus tard que dans le cadre de notre

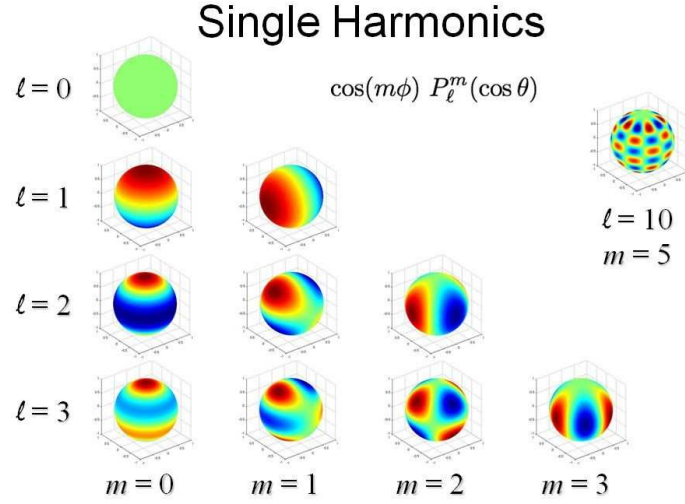


FIGURE 9.3: Représentation des harmoniques sphériques.

étude, nous pouvons considérer les harmoniques jusqu'à Y_2^0 uniquement. La figure 9.3 représente le comportement des harmoniques sphériques. Sur cette figure, on indique, en bleu le minimum de la fonction et en rouge le maximum. Le rang 0 des harmoniques correspond en fait à la valeur moyenne du signal. Le rang 1 quant à lui présente un maximum dans une direction et un minimum dans la direction opposée : c'est le dipôle. Le rang (2,0) présente un signal présentant une variation (augmentation ou déficit de signal) uniquement aux pôles de la sphère, on dit que c'est un quadrupôle complètement développé le long de la coordonnée z . Commençons par considérer un signal purement dipolaire, c'est-à-dire avec $\ell = 1$. On commence par remarquer les relations

$$Y_\ell^m = (-1)^m Y_\ell^{-m*} \Leftrightarrow C_{\ell,m} = (-1)^m C_{\ell,-m}^*$$

car $N \in \mathbf{R}$: le flux est une grandeur réelle.

L'anisotropie en fonction des coefficients $C_{\ell,m}$

Dans l'encadré suivant, nous calculons l'amplitude de l'anisotropie dipolaire et quadripolaire en fonction des coefficients des harmoniques sphériques.

Calcul de δ_{dip} en fonction des $C_{\ell,m}$

Pour exprimer l'anisotropie dipolaire en fonction des coefficients des harmoniques sphériques, on réécrit N sur la base des harmoniques sphériques

$$\begin{aligned}
 N &= C_{0,0}Y_0^0 + C_{1,0}A \cos \theta - \frac{A}{\sqrt{2}}C_{1,1} \sin \theta \cos \phi + i \frac{A}{\sqrt{2}}C_{1,1} \sin \theta \sin \phi + \frac{A}{\sqrt{2}}C_{1,-1} \sin \theta \cos \phi \\
 &\quad + i \frac{A}{\sqrt{2}}C_{1,-1} \sin \theta \sin \phi \\
 &= C_{0,0}Y_0^0 + C_{1,0}A \cos \theta - \Re_e(C_{1,1})A \sqrt{2} \sin \theta \cos \phi - \Im_m(C_{1,1})A \sqrt{2} \sin \theta \sin \phi \\
 \text{Avec } A &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

En choisissant de se fixer à une latitude $\theta = \pi/2$ et en orientant les axes tel que $\Im_m(C_{1,1}) = 0$ (qui correspond en fait à $\phi_0 = 0$), on obtient, pour un signal purement dipolaire, une forme :

$$N = C_{0,0}Y_0^0 - \Re_e(C_{1,1})A \sqrt{2} \cos \phi$$

qui a bien la même forme que

$$N = \langle N \rangle (1 + \delta_{dip} \cos \phi).$$

Ici par identification de ces deux équations, l'amplitude de l'anisotropie, pour un signal purement dipolaire, est donnée par

$$\delta_{dip} = -\frac{\Re_e(C_{1,1}) \sqrt{6}}{C_{0,0}}.$$

Cependant si nous faisons tourner le dipôle (pour changer la position de son maximum), autrement dit si nous faisons une rotation du système d'axe, le coefficient $C_{1,1}$ va être modifié. Mais le fait est qu'il ne s'agit que d'une rotation d'axe, l'amplitude du dipôle n'a donc pas de raison d'être changée. Nous allons donc chercher une valeur de δ_{dip} en fonction des $C_{1,i}$ qui soit indépendante de ces rotations. Pour cela, cherchons une combinaison des $C_{1,i}$ invariante par rotation. C'est en fait très simple

si l'on réécrit les harmoniques en harmoniques réelles :

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1^{-1} - Y_1^1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x}{r} \quad (9.6)$$

$$P_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1^{-1} + Y_1^1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{y}{r} \quad (9.7)$$

$$P_z = Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \quad (9.8)$$

On peut réécrire (9.5) :

$$N = C_{0,0}Y_0^0 + C_x P_x + C_y P_y + C_z P_z = C_{0,0}Y_0^0 + \vec{C}^t \cdot \vec{P} = C_{0,0}Y_0^0 + \sqrt{\frac{3}{4\pi r^2}} \vec{C}^t \cdot \vec{X} \quad (9.9)$$

avec

$$\begin{aligned} C_x &= -\sqrt{2} \Re_e(C_{1,1}) \\ C_y &= -\sqrt{2} \Im_m(C_{1,1}) \\ C_z &= C_{1,0} \end{aligned} \quad (9.10)$$

Dès lors, on peut remarquer que sous une rotation du système d'axes on a :

$$f(x, y, z) = C_{0,0}Y_0^0 + \vec{C}^t \cdot \vec{P} \rightarrow Rf(x, y, z) = C_{0,0}Y_0^0 + \vec{C}^t R \vec{P}$$

ce qui équivaut à avoir une fonction différente dans l'ancien système d'axes avec des coefficients donnés par $\vec{C}^t R$. La norme du vecteur résultant est : $(\vec{C}^t R)^2 = \vec{C}^t R R^t \vec{C} = \|\vec{C}\|^2$ (grâce aux propriétés du groupe des rotations). Donc la norme de \vec{C}^t est indépendante du système d'axes, c'est donc un bon candidat pour évaluer l'amplitude de l'anisotropie dipolaire. Il ne reste plus qu'à exprimer l'amplitude du dipôle en utilisant (9.5) et (9.4)

$$\begin{aligned} N &= C_{0,0}Y_0^0 + \sqrt{\frac{3}{4\pi r^2}} \vec{C}^t \cdot \vec{X} = C_{0,0} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left(1 + \sqrt{3} \frac{\|\vec{C}\| \cdot \|\vec{X}\|}{r C_{0,0}} (\widehat{\vec{C} \cdot \vec{X}}) \right) \\ N &= C_{0,0} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left(1 + \sqrt{3} \frac{\|\vec{C}\|}{C_{0,0}} (\widehat{\vec{C} \cdot \vec{X}}) \right) \end{aligned} \quad (9.11)$$

On a donc,

$$\delta_{dip} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}}{C_{0,0}} \quad (9.12)$$

On a donc en utilisant (9.10) :

$$\delta_{dip} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{2|C_1^1|^2 + |C_0^1|^2}}{C_{0,0}} \quad (9.13)$$

Le cas du dipôle est donc un cas simple. La décomposition en harmoniques sphériques du signal directionnel nous donne directement l'amplitude de l'anisotropie dipolaire. Nous ne ferons cependant pas la même gymnastique pour le quadripôle. En effet, à priori à cause du vent galactique et du libre échappement en z , les effets quadripolaires devraient apparaître le long de l'axe z préférentiellement. Dans cette approximation on arrête le développement en harmoniques à l'ordre ($l = 2, m = 0$). On ajoute le terme correspondant à l'équation (9.11) pour obtenir

$$\begin{aligned} N &= C_{0,0} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left(1 + \sqrt{3} \frac{\|\vec{C}\|}{C_{0,0}} (\vec{C} \cdot \vec{X}) \right) + C_{2,0} Y_2^0 \\ N &= C_{0,0} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left(1 + \sqrt{3} \frac{\|\vec{C}\|}{C_{0,0}} (\vec{C} \cdot \vec{X}) + \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{C_{2,0}}{C_{0,0}} (3 \cos^2 \theta - 1) \right) \end{aligned} \quad (9.14)$$

On choisira donc, arbitrairement, pour δ_{quad} , une valeur de

$$\delta_{quad} = \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{C_{2,0}}{C_{0,0}} \quad (9.15)$$

Les harmoniques sphériques nous permettent d'obtenir les anisotropies dipolaire et quadrupolaire à condition d'avoir une carte complète du ciel et de l'intégrer. Le calcul peut donc être assez long mais c'est la seule méthode efficace pour le cas du quadripôle. Nous allons voir que dans le cas du dipôle un développement limité permet d'avoir une expression analytique plus simple de l'anisotropie.

Développement du flux autour du libre parcours moyen

Nous développons dans cet encadré la fonction N autour de $r = \lambda$ pour obtenir une expression analytique de l'anisotropie dipolaire.

Détermination d'une expression analytique du dipôle

Considérons le flux $N(\lambda, \theta, \phi)$. Pour des énergies pas trop importantes, on considère le libre parcours moyen suffisamment petit pour faire un développement limité de N autour de $\lambda = 0$ (pour une énergie de 1 TeV, λ est de l'ordre de 10^{-2} kpc, donc petit devant les échelles du système), le développement limité nous donne

$$N(\lambda, \theta, \phi) = N(0, \theta, \phi) + \lambda \left. \frac{\partial N(\lambda, \theta, \phi)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} + \frac{\lambda^2}{2} \left. \frac{\partial^2 N(\lambda, \theta, \phi)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} + \dots \quad (9.16)$$

En passant en coordonnées cylindriques dans la galaxie, et en changeant de référentiel (on note d la distance entre le Système solaire et le point d'intérêt et r la coordonnée cylindrique radiale du point d'intérêt lorsque le centre du repère est le centre galactique). Dans ce cas on a le changement de coordonnées suivant

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\lambda \sin \theta)^2 + d^2 - 2d\lambda \sin \theta \cos \phi} \\ z &= \lambda \cos \theta \\ \sin \theta_{cyl} &= \frac{\lambda \sin \theta \sin \phi}{r} \end{aligned} \quad (9.17)$$

on a de plus

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = \frac{\partial r}{\partial \lambda} \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial N}{\partial z} + \frac{\partial(\sin \theta_{cyl})}{\partial \lambda} \frac{\partial N}{\partial \sin \theta_{cyl}} \quad (9.18)$$

On obtient, en utilisant $r(\lambda = 0) = d$

$$N(\lambda, \theta, \phi) = N(0, \theta, \phi) + \lambda \left[- \left. \frac{\partial N}{\partial r} \right|_{\lambda=0} \sin \theta \cos \phi + \frac{1}{d} \frac{\partial N}{\partial \theta_{cyl}} \sin \theta \sin \phi + \left. \frac{\partial N}{\partial z} \right|_{\lambda=0} \cos \theta \right] \quad (9.19)$$

En identifiant avec (9.5), on a :

$$\begin{cases} C_0^0 = N(0, \theta, \phi) \sqrt{4\pi} \\ C_1^0 = 2 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \lambda \left. \frac{\partial N}{\partial z} \right|_{\lambda=0} \\ \Re_e(C_1^1) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \lambda \left. \frac{\partial N}{\partial r} \right|_{\lambda=0} \\ \Im_m(C_1^1) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \lambda \frac{1}{d} \left. \frac{\partial N}{\partial \theta_{cyl}} \right|_{\lambda=0} \end{cases} \quad (9.20)$$

D'où, en utilisant (9.13)

$$\delta_{dip} = \frac{\lambda}{N(0, \theta, \phi)} \sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial z}\bigg|_{\lambda=0}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial r}\bigg|_{\lambda=0}\right)^2 + \left(\frac{1}{d} \frac{\partial N}{\partial \theta_{cyl}}\bigg|_{\lambda=0}\right)^2} \quad (9.21)$$

On a donc :

$$\delta_{dip} = \lambda \frac{|\overrightarrow{\text{grad}} N_{\odot}|}{N_{\odot}} \quad (9.22)$$

Cette relation est particulièrement intéressante car dans le cas du disque infiniment fin $\frac{\partial N}{\partial z}\big|_{\lambda=0} = 0$. D'autre part dans le cas d'une symétrie cylindrique (pour les calculs stationnaires par exemple) on a $\frac{\partial N}{\partial(\sin \theta_{cyl})}\big|_{\lambda=0} = 0$. Ces deux simplifications conduisent à

$$\delta_{dip} = \frac{\lambda}{N_{\odot}} \left| \frac{\partial N}{\partial r} \right| \quad (9.23)$$

Cet estimateur nous permet d'avoir très rapidement les valeurs de l'anisotropie à condition d'avoir les expressions analytiques des flux. Pour cet estimateur, il n'est donc pas nécessaire d'intégrer les cartes du ciel pour obtenir l'anisotropie. D'autre part cette expression montre que le dipôle est directement relié au gradient du flux. Dans le cadre du modèle stationnaire, les symétries sont telles que l'anisotropie est donnée simplement par le gradient du flux selon r , ce qui réduit considérablement le temps de calcul. Pour finir nous voyons une dernière méthode de détermination du dipôle.

Détermination d'un estimateur grâce à une fonction analytique

Nous cherchons dans cette section directement l'expression de l'amplitude de l'anisotropie dipolaire en fonction de points caractéristiques de la fonction N . Ici "points caractéristiques" désigne des points qui seront facilement repérés sur une carte d'anisotropie, dans notre cas il s'agira uniquement du maximum et du minimum du flux N_{\max} et N_{\min} . Partons de l'expression analytique d'un dipôle à l'aide des harmoniques sphériques :

$$N(\theta, \phi) = N_0 [1 + \delta_{10} \cos \theta - \sin \theta (\Re_e(\delta_{11}) \cos \phi - \Im_m(\delta_{11}) \sin \phi)] \quad (9.24)$$

Nous allons procéder à une simple étude de fonction pour exprimer la valeur de l'anisotropie. On oriente le repère de sorte que le maximum de la fonction se situe en $(\theta = \pi/2, \phi = 0)$. Pour trouver les

maxima et minima de la fonction, on annule le gradient et on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} N(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \theta} \\ \frac{\partial N}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 (-\delta_{10} \sin \theta - \cos \theta (\Re_e(\delta_{11}) \cos \phi - \Im_m(\delta_{11}) \sin \phi)) \\ N_0 \sin \theta (\Re_e(\delta_{11}) \sin \phi + \Im_m(\delta_{11}) \cos \phi) \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

Le choix arbitraire du maximum nous impose d'annuler le gradient pour au moins un couple $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{2}, 0)$. Ceci conduit directement à :

$$\delta_{10} = 0 \quad \text{et} \quad \Im_m(\delta_{11}) = 0 \quad (9.26)$$

On notera donc $\Re_e(\delta_{11}) = \delta_{11}$ (Nous ne considérons pas le cas $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ car il s'agit du même point).

D'autre part on peut dégager d'autres couples de valeurs qui sont susceptibles d'annuler le gradient : $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ et $(\theta, \phi) = (0, \frac{\pi}{2})$

En calculant le déterminant de la matrice Hessienne du système, on s'aperçoit que le deuxième point est un point col et le premier par contre est un vrai minimum local. On peut alors dégager le système d'équations suivant en utilisant (9.26) et en calculant les minima et maxima trouvés

$$\begin{cases} N_{max} = N_0(1 - \delta_{11}) \\ N_{min} = N_0(1 + \delta_{11}) \end{cases} \quad (9.27)$$

Ici δ_{11} est l'amplitude δ_{dip} de l'anisotropie que nous cherchons. On obtient la solution

$$\begin{cases} N_0 = \frac{N_{max} + N_{min}}{2} \\ \delta_{11} = \frac{N_{max} - N_{min}}{2N_0} = \frac{N_{max} - N_{min}}{N_{max} + N_{min}} \end{cases} \quad (9.28)$$

Ce dernier résultat a le bénéfice d'éviter d'intégrer le flux obtenu sur θ et ϕ pour obtenir les coefficients des harmoniques sphériques, il suffit de connaître le maximum et le minimum du flux sur la carte. Les trois estimateurs sont équivalents mais utilisables uniquement dans le cas du dipôle. Pour le quadripôle, seul le coefficient $C_{2,2}$ nous intéresse, aussi on ne cherche pas à exprimer une combinaison $C_{2,m}$ invariante par rotation. On se contentera donc d'intégrer la carte du flux pour obtenir le coefficient $C_{2,2}$ correspondant. Nous verrons également une dernière méthode approchée pour un calcul rapide du coefficient. Cette méthode est plus sensible au bruit de mesure, mais elle reste, nous le verrons une très bonne approximation de l'anisotropie dipolaire.

On résume ici les trois différentes techniques pour calculer l'anisotropie dipolaire du rayonnement

cosmique :

$$\delta_{dip} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{2|C_1^1|^2 + |C_0^1|^2}}{C_{0,0}} \quad (9.29)$$

$$\delta_{dip} = \lambda \frac{|\vec{\text{grad}} N_\odot|}{N_\odot} \quad (9.30)$$

$$\delta_{dip} = \frac{N_{max} - N_{min}}{N_{max} + N_{min}} \quad (9.31)$$

Ces estimateurs donnent tous une valeur de l'anisotropie mais pas de sa phase (la direction du maximum). Une alternative consiste donc à considérer l'anisotropie comme un vecteur et, en s'appuyant sur le deuxième estimateur, à considérer la projection du vecteur anisotropie sur trois axes :

$$\delta_i = \lambda \frac{|\partial N_\odot / \partial i|}{N_\odot} \quad (9.32)$$

$$i = x, y, z \quad (9.33)$$

Cette approche sera plus intéressante lorsque nous traiterons l'anisotropie de sources ponctuelles. En effet, on ne peut pas sommer individuellement l'amplitude de l'anisotropie de chaque source mais on peut sommer chaque composante de leurs vecteurs d'anisotropie.

2 LES EXPÉRIENCES

Les expériences qui mesurent l'anisotropie du rayonnement cosmique autour du GeV/TeV se situent toutes au sol. En effet, on ne sait pas utiliser de méthodes efficaces pour réduire les erreurs systématiques dans les expériences satellites. Par exemple, des expériences comme PAMELA travaillent à des méthodes de réduction du bruit de mesures mais pour l'instant, ils ne peuvent placer que des limites sur l'anisotropie ([Campana et al. 2013](#)). Pour réduire les erreurs de mesure et observer le signal attendu les expériences se servent de la rotation de la Terre. La méthode de mesure est développée dans ([Mollerach 2009](#)). Avant de détailler la méthode, commençons par introduire les deux principaux systèmes de coordonnées utilisés.

2.1 Les systèmes de coordonnées

Dans cette thèse nous utilisons principalement deux systèmes de coordonnées : les coordonnées galactiques et les coordonnées équatoriales. Le premier est le plus naturel pour nous, c'est un système de coordonnées centré sur le Système solaire. On utilise deux coordonnées ℓ et b appelées la longitude galactique et la latitude galactique. Pour les décrire on utilise un plan de référence (l'équivalent du plan (xz) en coordonnées sphériques) ainsi qu'un axe de référence (l'équivalent de l'axe x en coordonnées sphériques).

La longitude galactique ℓ décrit l'angle dans le plan galactique avec l'axe pointant vers le centre galactique. La latitude galactique b décrit l'angle avec le plan galactique. On les décrit généralement en degrés. Le système est représenté sur la figure 9.4. Nos expressions semi-analytiques de flux de rayons cosmiques peuvent être facilement converties dans ce système de coordonnées, c'est donc le plus simple d'utilisation pour nous.

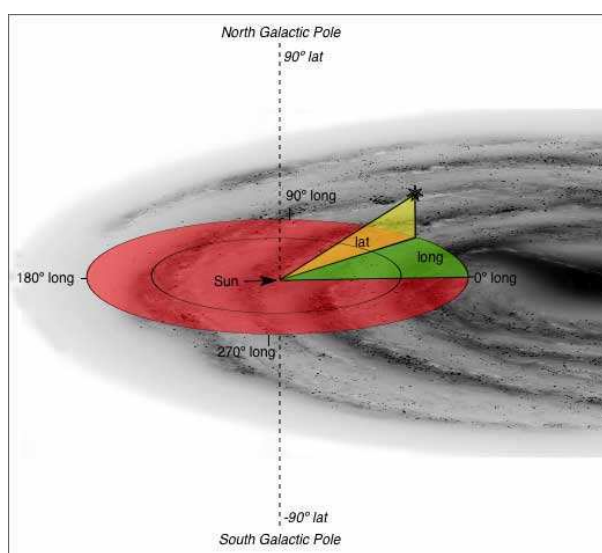


FIGURE 9.4: Système de coordonnées galactiques. ([Think Astronomy 2008](#))

Cependant, les mesures d'anisotropie se font en coordonnées équatoriales. C'est un système qui a pour plan de référence l'équateur terrestre. Comme celui-ci n'est pas dans le plan galactique, ce plan est différent du plan de référence des coordonnées galactiques. L'angle entre ces deux plans n'est pas constant dans le temps, la Terre effectue un léger mouvement de précession autour de son axe de rotation. Le système de coordonnées est donc fixé à un instant donné dans le temps, la dernière convention pour fixer le système date de l'an 2000 (la convention s'appelle J2000). D'autre part l'axe de référence du système est fixé arbitrairement, il pointe vers le soleil à l'équinoxe de mars, ce point est appelé le point vernal. Ces coordonnées sont décrites par l'ascension droite (notée "ra" ou encore α) et la déclinaison (notée "dec" ou encore δ). La déclinaison décrit l'angle entre l'objet céleste et le plan de référence. Cette coordonnée est notée en degrés et est comprise entre -90° pour les objets au-

dessous de l'équateur céleste et 90° pour les objets au-dessus. L'ascension droite est liée à la rotation de la Terre, on la note souvent en heures minutes secondes (24h correspondant à un cercle complet). L'avantage d'une telle notation est qu'un objet dans le ciel met 24h à revenir à la même position grâce à la rotation de la Terre. On peut voir le système de coordonnées sur la figure 9.5.

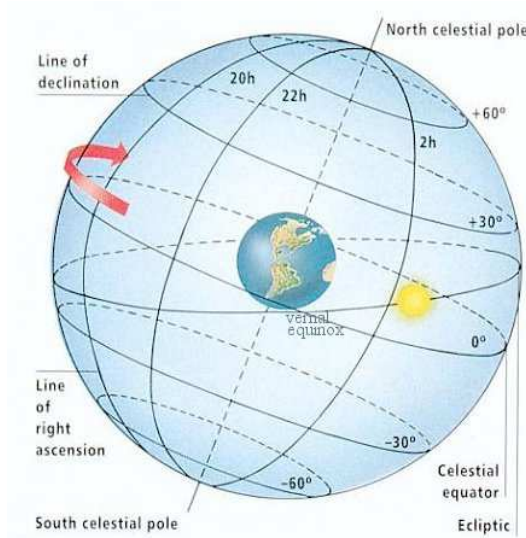


FIGURE 9.5: Système de coordonnées équatoriales. (Mihos 2013)

Les relations pour passer d'un système de coordonnées à un autre s'écrivent (Weisstein 2013)

$$\begin{aligned} \cos b \cos(l - 33^\circ) &= \cos \delta \cos(\alpha - 285.25^\circ) \\ \cos b \sin(l - 33^\circ) &= \sin \delta \sin 62.6^\circ + \cos \delta \sin(\alpha - 282.25^\circ) \cos 62.6^\circ \\ \sin b &= \sin \delta \cos 62.6^\circ - \cos \delta \sin(\alpha - 282.25^\circ) \sin 62.6^\circ \end{aligned} \quad (9.34)$$

Aux vues des symétries de notre système les cartes en coordonnées équatoriales sont difficiles à interpréter directement. En effet, la direction du plan galactique est représentée par une sinusoïde sur ces cartes. La figure 9.6 permet de visualiser la différence entre les deux systèmes de coordonnées. Nous allons voir que cette transformation rend les prédictions d'anisotropie assez difficiles à interpréter. Nous allons maintenant voir comment les expériences traitent les données dans le système de coordonnées équatoriales.

2.2 Principe des mesures

La majorité des expériences ne mesurent en fait pas l'anisotropie réelle du ciel, mais effectuent des mesures d'anisotropie par bande de déclinaison. En effet, pour une bande de déclinaison fixée, il suffit de se servir de la rotation de la Terre pour parcourir toutes les ascensions droites. De plus une

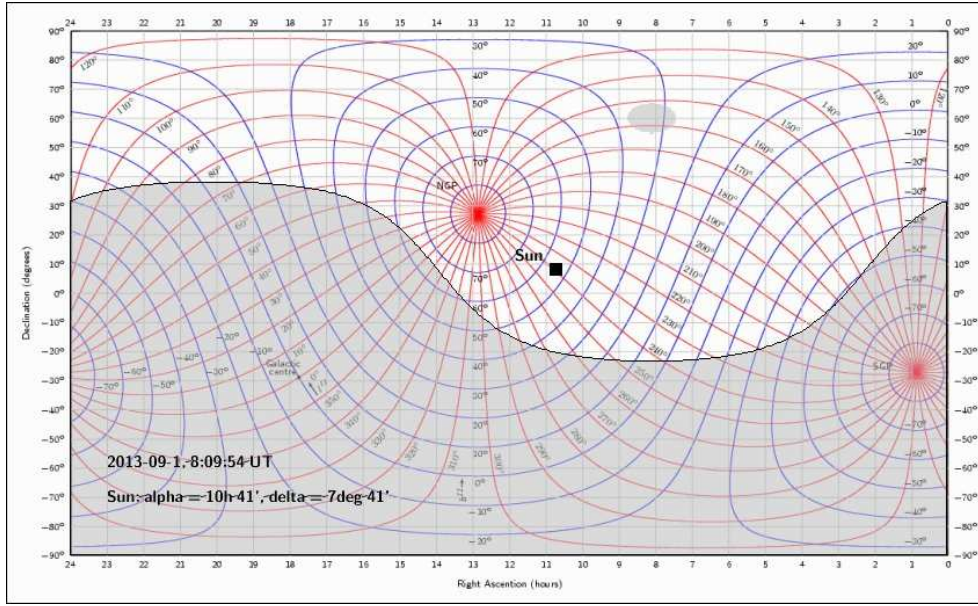


FIGURE 9.6: Représentation des coordonnées galactiques dans le système de coordonnées équatoriales (Stockholm University 2013)

expérience au sol ne peut pas voir toutes les déclinaisons, car en fonction de l'hémisphère terrestre où elle se situe, une partie du ciel lui est masqué. Dans ce cadre, des méthodes de mesures particulièrement efficaces ont été mises au point pour observer l'anisotropie dans une bande de déclinaison et permettre de réduire les erreurs de mesures. Certaines études sont développées pour mener de vraies analyses en deux dimensions (Aublin & Parizot 2005). Dans cette idée, l'expérience ICECUBE, qui a une bonne connaissance de son bruit de fond, commence à faire des analyses complètes du ciel en utilisant les harmoniques sphériques (IceCube Collaboration et al. 2011).

La mesure que nous devons comparer à nos résultats n'est donc pas une vraie carte des fluctuations du signal dans le ciel mais une projection de cette carte moyennée par bande de déclinaison. Les analyses ne sont donc pas faites sur toute la carte mais généralement sur chaque bande de déclinaison. L'analyse à 2 dimensions est ramenée à de multiples analyses à 1 dimension. Les valeurs extraites du signal sont les coefficients des harmoniques du signal de chaque déclinaison. La méthode d'analyse des harmoniques du signal pour chaque bande de déclinaison est appelée méthode de Rayleigh : le signal dans une bande de déclinaison est décomposé en transformée de Fourier puis les coefficients associés sont ceux permettant d'évaluer l'anisotropie (Linsley 1975). Pour une bande de déclinaison donnée la décomposition du signal N est

$$N(\alpha, \delta_i) = N_{0,i} + \sum_j a_{i,j} \cos(\alpha - \alpha_{0,i,j}) \quad (9.35)$$

Les mesures montrent qu'arrêter cette décomposition à la troisième harmonique permet une très bonne

reconstruction du signal. La méthode de Rayleigh combine cette décomposition avec une méthode statistique pour évaluer la signifiante des signaux d'anisotropie reconstruits. C'est-à-dire la probabilité pour que les signaux reconstruits ne soient pas issus du bruit de fond. Par exemple pour l'expérience MILAGRO, on représente sur la figure 9.7 les harmoniques de Fourier observées ainsi que les signaux moyennés par bande de déclinaison.

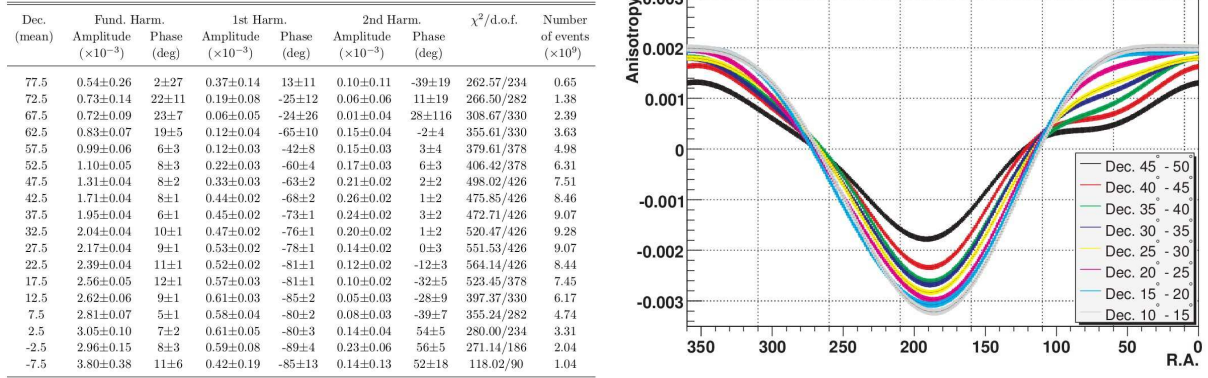


FIGURE 9.7: Coefficients de Fourier mesurés (à gauche) et signaux reconstruits grâce à ces coefficients (à droite). (Abdo et al. 2008)

Ensuite ces signaux reconstruits sont replacés dans une carte, par exemple la carte de la figure 9.8 dans le cas de MILAGRO.

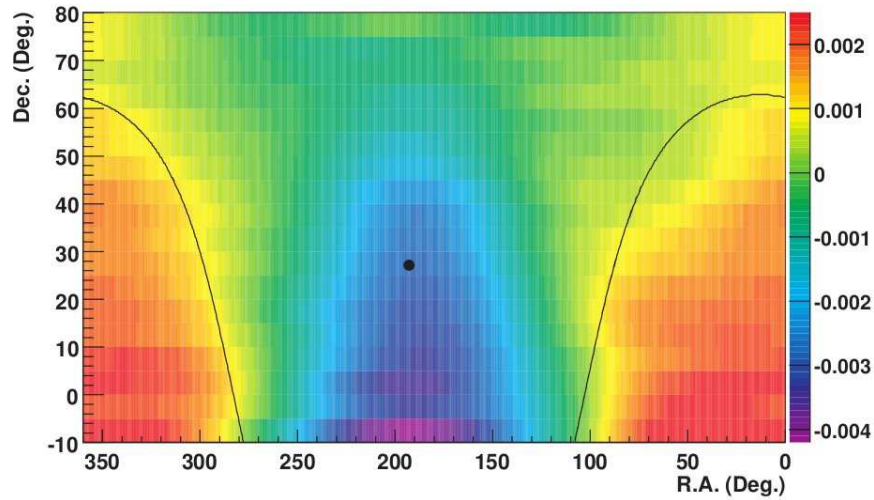


FIGURE 9.8: Carte du ciel reconstruite par MILAGRO. (Abdo et al. 2008)

Donc les expériences ne voient pas vraiment le ciel en 2 dimensions mais une série de projections de chaque bande de déclinaison. L'anisotropie mesurée sur cette carte sera donc modifiée par rap-

port à l'anisotropie réelle. De plus la mesure, reportée des expériences, est en fait une combinaison des mesures dans chaque bande de déclinaison. Plus précisément, le signal total est projeté sur une seule bande de déclinaison, puis la première harmonique du signal obtenu est calculée, c'est cette valeur qui est utilisée pour reporter les mesures (voir par exemple la figure 9.10). La phase de la première harmonique est également récupérée. Il conviendra donc pour nos résultats de refaire la même transformation. Cette transformation est doublement problématique, d'une part elle fait perdre la corrélation du signal suivant la déclinaison et d'autre part elle peut modifier la phase et la valeur absolue de l'anisotropie, particulièrement dans le cas où le maximum et le minimum du signal sont très dépendants de la déclinaison. Pour bien comprendre l'effet de cette mesure, étudions un cas extrême, le cas d'un signal avec une forte dépendance en déclinaison, la figure 9.9 montre ce type de signal avant et après transformation.

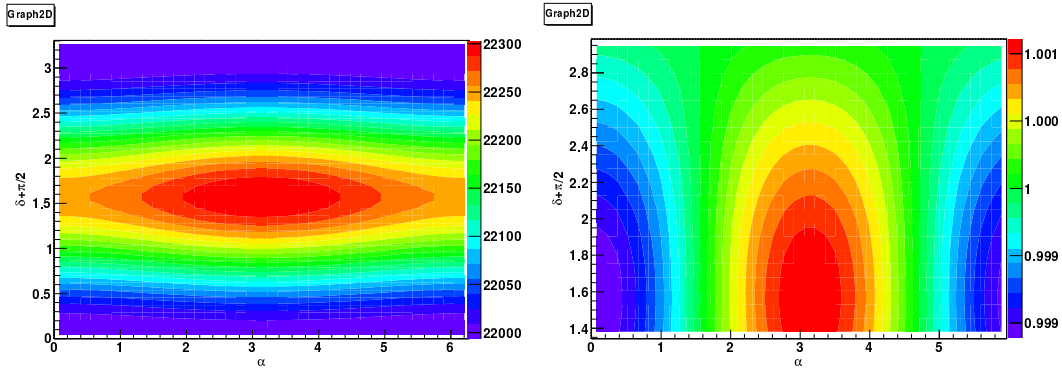


FIGURE 9.9: À gauche : carte théorique générée manuellement. À droite la même carte vue par les expériences

2.3 Les résultats

Les résultats de mesures d'anisotropie pour différentes expériences au GeV et au TeV sont reportés sur la figure 9.10. Nous utiliserons également une version plus récente de cette synthèse fournie par l'expérience ARGO-YBJ (Di Sciascio et al. 2012), montrée sur la figure 9.11. Ces résultats sont ceux de la première harmonique mesurée ainsi que la phase correspondante. Les premières mesures d'anisotropie au sol arrivent avec les premiers détecteurs de muons à grande échelle, depuis maintenant plusieurs dizaines d'années, c'est pourquoi on retrouve ces mesures sur une large gamme d'énergie. Cependant, seules les expériences récentes, reportent des cartes de demi-ciel avec une grande précision. On note par exemple les expériences MILAGRO (Abdo et al. 2008), ICECUBE (Abbasi et al. 2010), Tibet AS γ (Amenomori et al. 2006), et Argo-YBJ (Di Sciascio et al. 2012). Les mesures de la figure 9.11 montrent que l'anisotropie a tendance à augmenter avec l'énergie. Cependant au delà de 10 TeV, il semblerait (voir figure 9.12) que l'anisotropie diminue, puis elle retrouve une légère tendance à l'augmentation vers 10^5 GeV suivant les mesures d'EAS TOP (Aglietta et al. 2009). D'autre

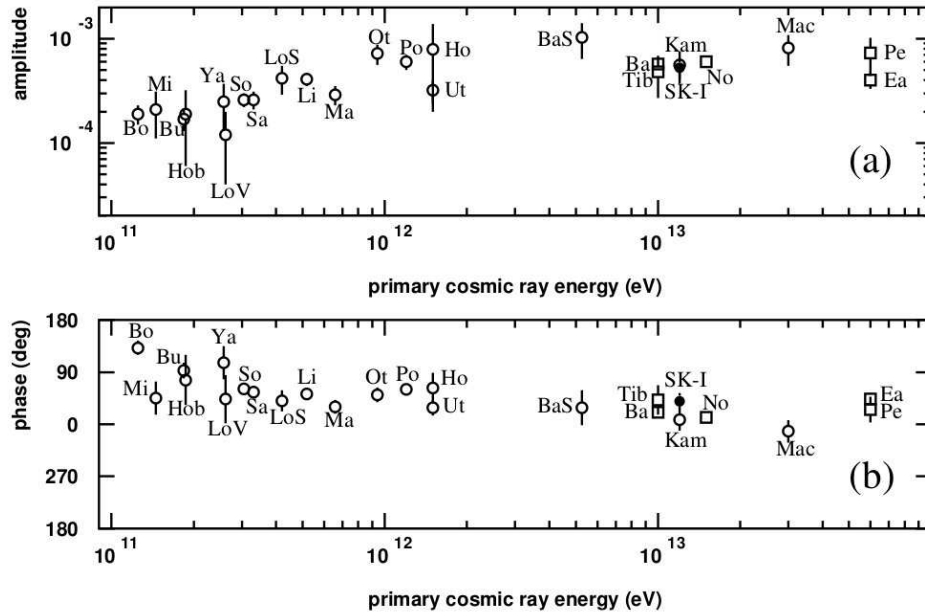


FIGURE 9.10: Amplitudes et phases mesurées par les différentes expériences en anisotropie. (Guillian et al. 2007)

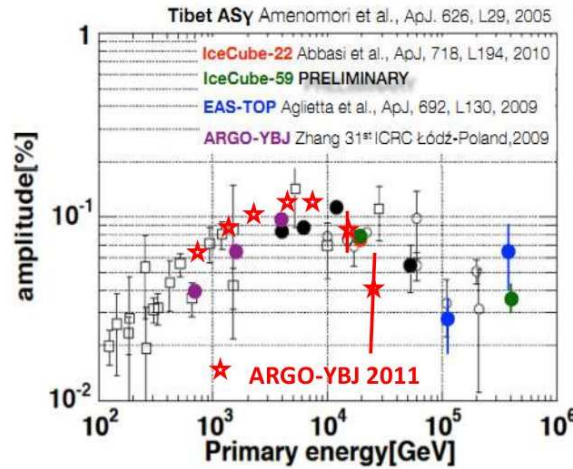


FIGURE 9.11: Amplitudes des premières harmonique mesurées par les différentes expériences en anisotropie. (Di Sciascio et al. 2012)

part, certaines expériences de mesures d'anisotropie comme TIBET AS γ (Amenomori et al. 2010) prennent leurs mesures depuis plusieurs années, et elles tendent à montrer que l'anisotropie ne varie pas sur plusieurs années (voir figure 9.13). Ce résultat n'est pas arrêté étant donné que l'expérience MILAGRO observe une légère modification dans son signal depuis le début de sa prise de données (Abdo et al. 2008). Les comportements énergétique et temporel sont très importants car ils nous four-

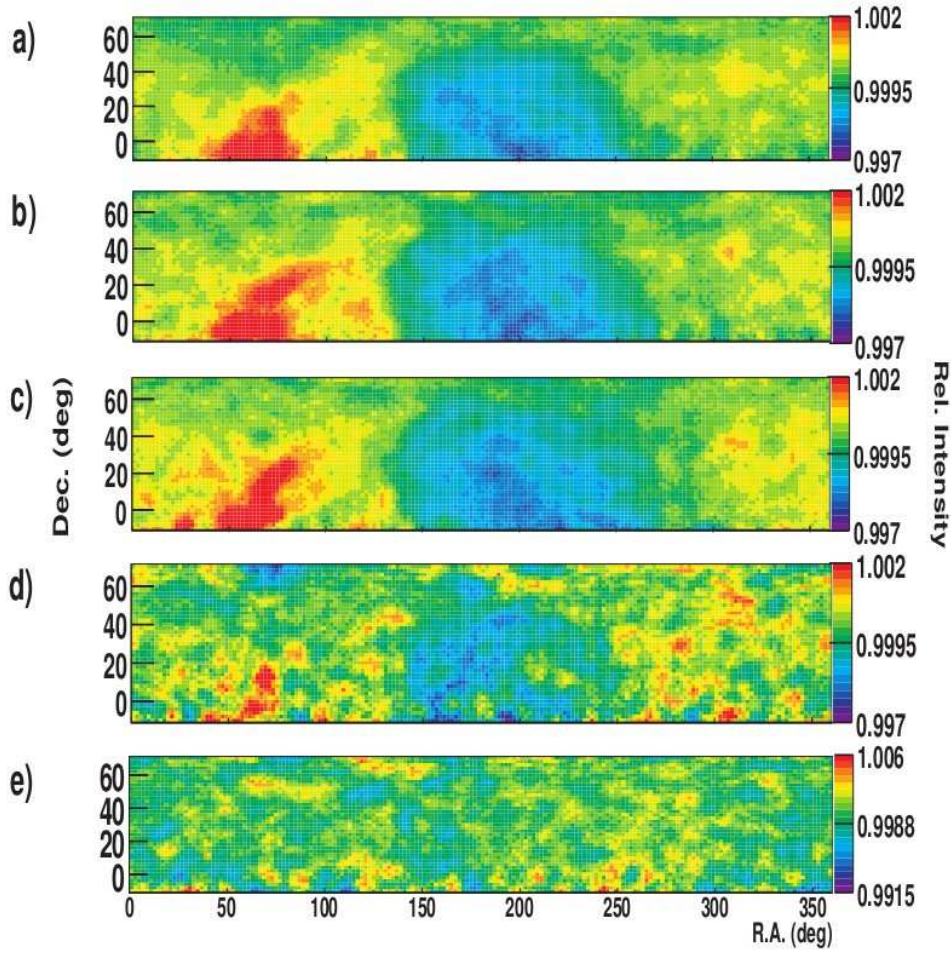


FIGURE 9.12: Anisotropie observée par Tibet II pour des énergies de a) 4 TeV, b) 6.2 TeV, c) 12 TeV, d) 50 TeV, e) 300TeV (Amenomori et al. 2006)

niront des arguments forts dans la discussion sur les raisons probables de l'anisotropie observée.

Les résultats de mesures présentent des variations dans le ciel sur plusieurs échelles angulaires. Aux très grandes échelles angulaires (dipôle et quadripôle) les fluctuations sont de l'ordre du pour mille. La soustraction de ce signal au signal total permet de faire émerger des structures à plus petite échelle. L'origine de chacun de ces types de structures est aujourd'hui incertaine et est un problème à part entière.

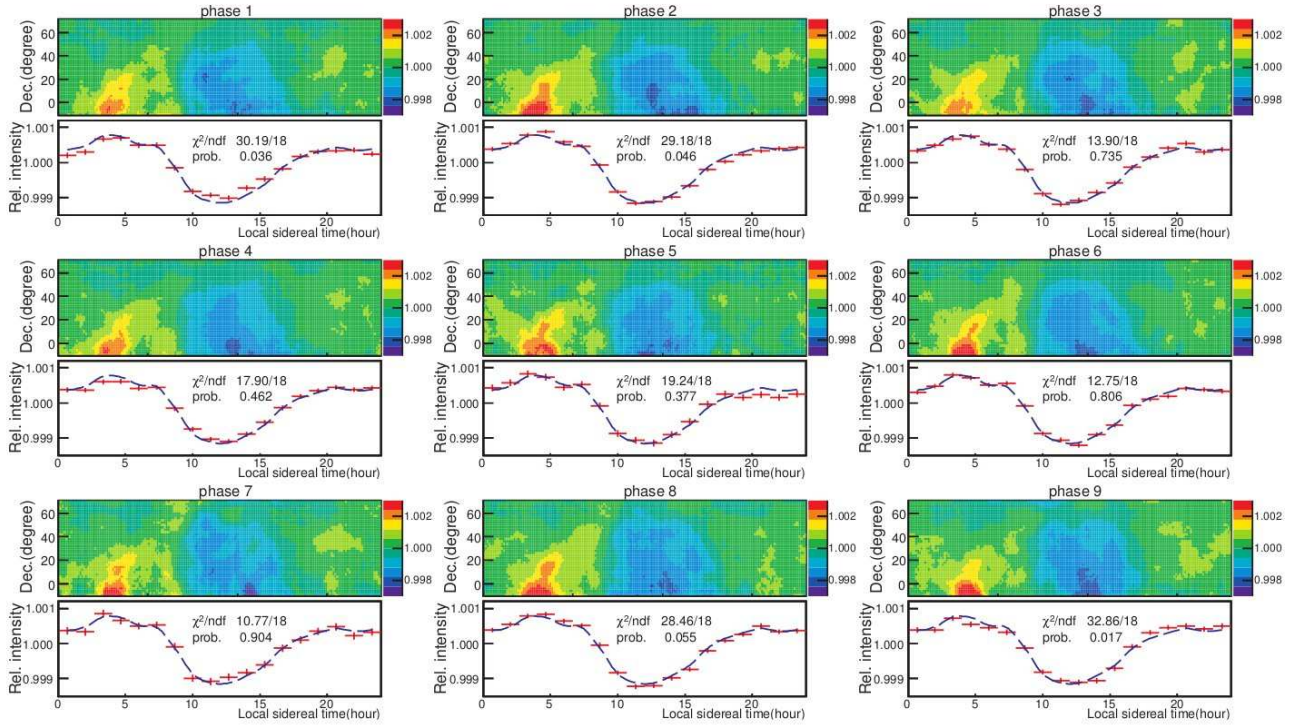


FIGURE 9.13: Évolution de l'anisotropie observée par Tibet III sur 9 ans à 5 TeV. (Amenomori et al. 2010)

2.4 Les différentes explications

Il existe différentes hypothèses concernant ces observations d'anisotropie. Commençons par mentionner celle que nous développerons principalement dans cette thèse : une anisotropie provenant des effets de propagation. Nous verrons que, dans le cadre de nos modèles de propagation, on prédit l'existence d'un signal anisotrope du fait de la présence de libre échappement vertical dans la galaxie ainsi que de la répartition non uniforme des sources. Nous étudierons également un effet plus fin : celui de la possibilité d'un coefficient de diffusion local différent que dans le reste de la galaxie. Une autre hypothèse, parfois mise en avant (Giacinti & Sigl 2012), provient de la nature turbulente du champ magnétique. Certains types de turbulences peuvent engendrer des mouvements locaux particuliers de cosmiques engendrant une anisotropie. L'anisotropie prédite est essentiellement présente sur des petites échelles.

Nous verrons que l'environnement local influe sur cette mesure. Notamment il est avancé que l'héliosphère peut jouer un rôle important. L'argument principal étant que, lorsqu'on regrade les structures à petites échelles, il existe un déficit qui pointe dans une direction proche de la queue de l'héliosphère. Selon (Lazarian & Desiati 2010), la réaccélération des particules cosmiques par des reconnections ma-

gnétiques dans l'héliosphère en deça de 100 TeV peut être responsable de ces structures. L'argument souvent opposé est que les mesures d'anisotropie sont restées constantes pendant les 10 dernières années. Or le Soleil suit des cycles, on devrait donc s'attendre à voir l'impact de l'héliosphère sur l'anisotropie être différent sur des échelles de temps de l'ordre de grandeur des cycles solaires. Or, ce n'est pas le cas.

Pour finir notons la dernière source possible d'anisotropie : l'effet Compton-Getting (mis en évidence par Arthur Compton et Ivan Getting en 1935 [Compton & Getting \(1935\)](#)). La Terre étant en mouvement dans la galaxie, l'effet Compton-Getting prévoit l'apparition d'une anisotropie provenant du vent de cosmiques apparent que nous devrions recevoir. On sépare généralement l'effet en deux composantes : le mouvement du Système solaire dans la galaxie et le mouvement de la Terre dans le Système solaire. L'expression du dipôle créé par ces mouvements est donnée par :

$$\frac{I(E)}{\langle I \rangle} = \left(1 + \frac{V}{u}(\alpha + 2) \cos \theta \right) \quad (9.36)$$

Avec I l'intensité du signal, V la vitesse de déplacement de la Terre, u la vitesse des rayons cosmiques, α l'indice spectral du spectre des rayons cosmiques et θ l'angle entre la vitesse de la Terre et la direction d'arrivée des rayons cosmiques.

L'effet provenant du mouvement du Système solaire dans la galaxie est difficile à calculer car la direction de ce déplacement dans la galaxie ainsi que la vitesse sont assez mal connues. Néanmoins les estimations montrent, (en prenant une vitesse de 220 km/s), que cet effet devrait générer des anisotropies de l'ordre de 3×10^{-3} avec une phase inclinée à 45° par rapport à l'équateur céleste. Cet effet devrait être observé sur les mesures or ce n'est pas le cas. La tendance actuelle est donc de penser que le plasma de rayons cosmiques est en corotation avec les étoiles locales de la galaxie.

La vitesse de la Terre autour du Soleil est évaluée à 30 km.s^{-1} . En prenant $\alpha \sim 2.72$ et au TeV $u \sim c$, l'effet du mouvement de la Terre autour du Soleil est de l'ordre de 4.7×10^{-4} . Du fait de la vitesse des rayons cosmiques, la dépendance en énergie de cette valeur est relativement faible. Cet effet a pu être mis en évidence sur les mesures d'anisotropie par Tibet AS ([Amenomori et al. 2006](#)).

Dans tous les cas, nos modèles prédisent une anisotropie. Nous allons voir comment l'utiliser pour essayer de contraindre les paramètres de propagation. Pour commencer nous allons établir le comportement de l'anisotropie dans le cadre simple du modèle stationnaire.

3 L'ANISOTROPIE DANS LE CADRE DU MODÈLE STATIONNAIRE

3.1 Première approche

Dans le cadre du modèle stationnaire, il suffit de calculer la dérivée du flux et le flux lui-même et de les injecter dans la formule (9.29) pour obtenir directement la valeur de l'anisotropie dipolaire. Pour vérifier les méthodes théoriques d'évaluation de l'anisotropie, nous allons calculer l'anisotropie en fonction de l'énergie. On rappelle que dans le cadre du modèle stationnaire, avec une symétrie cylindrique, la densité de particules est donnée par

$$N(r, z) = \sum_i \tilde{N}_i(z) J_0 \left(\zeta_i \frac{r}{R} \right) \quad (9.37)$$

Étant données les symétries, seul le gradient en r n'est pas nul, son calcul est donc donné par

$$\frac{\partial N}{\partial r} = - \sum_i \frac{\zeta_i}{R} \tilde{N}_i(z) J_1 \left(\zeta_i \frac{r}{R} \right) \quad (9.38)$$

Et donc l'anisotropie est donnée par

$$\delta_{dip} = \lambda \frac{\sum_i \frac{\zeta_i}{R} \tilde{N}_i(z) J_1 \left(\zeta_i \frac{r}{R} \right)}{\sum_i \tilde{N}_i(z) J_0 \left(\zeta_i \frac{r}{R} \right)} \quad (9.39)$$

Avec

$$\lambda = \frac{3D}{v} \quad (9.40)$$

Ce résultat est donc essentiellement proportionnel à D . Dans le modèle continu, on s'attend donc à un comportement énergétique de l'anisotropie de la forme E^δ , avec δ l'indice spectral. De ce fait plus δ est élevé et plus l'anisotropie augmente avec l'énergie. Sur la figure 9.14 nous avons tracé les valeurs de l'anisotropie en fonction de l'énergie dans le cadre d'un modèle avec un disque épais. Les quatre courbes représentent les trois méthodes de détermination de l'anisotropie plus le calcul du quadripôle. On peut voir que dans tous les cas, le dipôle domine sur quadripôle. On voit aussi que le gradient et le calcul du premier ordre des harmoniques sphériques donnent des résultats très similaires. La dernière méthode est un peu moins précise mais conserve quand même la bonne tendance.

On observe que, dans la mesure où l'anisotropie est proportionnelle à D , la pente de l'anisotropie augmente bien avec δ . On constate cependant que les trois modèles min, med et max produisent une anisotropie trop élevée. Comme l'anisotropie est proportionnelle à D , on s'attend à pouvoir régler ce problème en réduisant D_0 . Pour observer les effets de la propagation sur l'anisotropie, on trace en

coordonnées galactiques dans le modèle med, les cartes d'anisotropie à 100 GeV, et 100 TeV sur la figure 9.15.

Nous adoptons dans un premier temps les coordonnées galactiques car leur interprétation est plus simple. Le centre galactique est repéré en $l = 0, b = 0$. On observe un maximum de rayons cosmiques provenant du centre galactique. On s'attend à ce genre d'effet puisque la distribution de sources est maximale vers le centre galactique. D'autre part, quand l'énergie augmente, il y a plus de libre échapement et la diffusion devient plus importante. La combinaison des deux effets entraîne plus d'intensité dans le disque et moins dans le halo. On observe bien qu'à haute énergie le disque galactique est plus présent, on s'attend donc à voir le quadripôle devenir plus important à haute énergie.

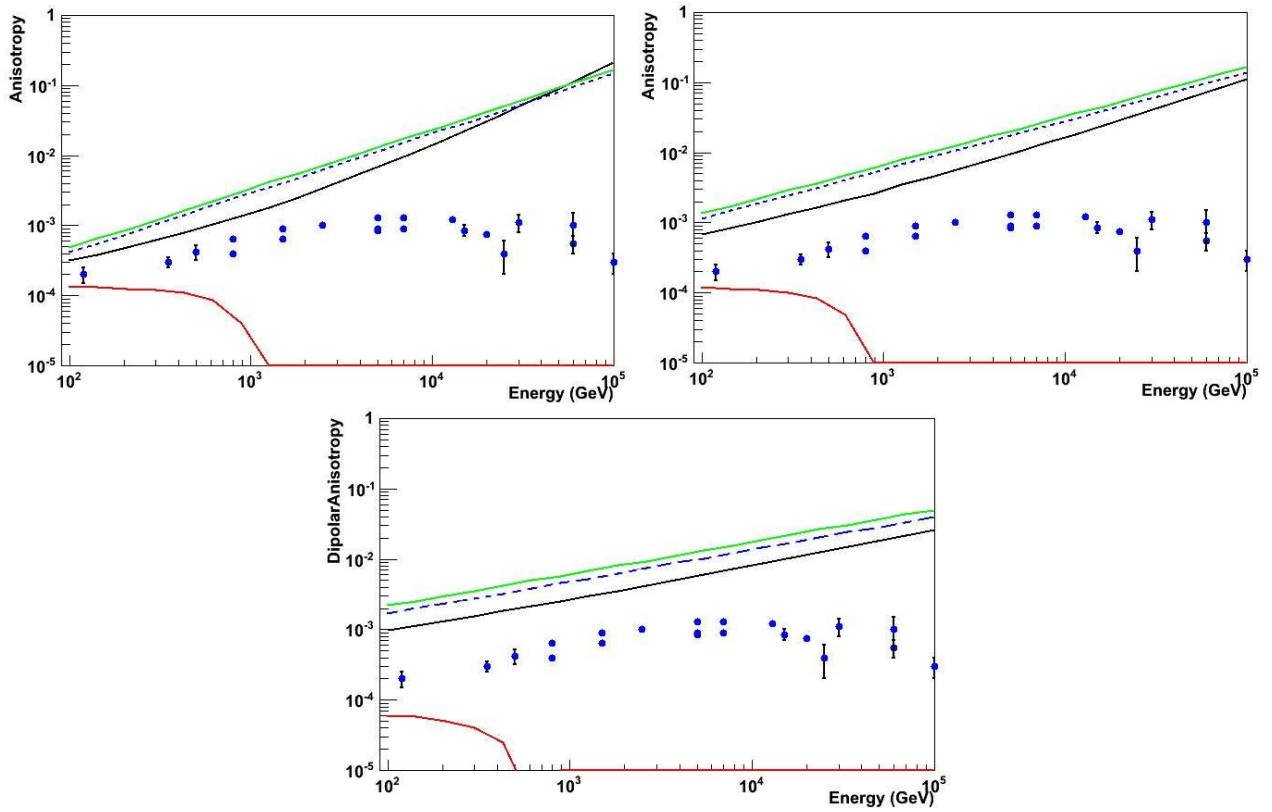


FIGURE 9.14: Valeurs des différents estimateurs de l'anisotropie en fonction de l'énergie pour les modèles min, med et max. En noir : calcul des points caractéristiques (9.28), en bleu pointillé le calcul du gradient (9.22), en vert le calcul de la première harmonique sphérique (9.13) et en rouge le calcul du quadripôle (9.15). Les points bleus indiquent les mesures expérimentales.

Nous avons effectué un test de χ^2 en faisant varier D_0 et δ pour trouver des couples de paramètres compatibles avec l'anisotropie. Les résultats sont très mauvais si nous faisons le test entre 100 GeV et 1000 TeV. En effet, au-delà de 10 TeV, il semble difficile de décrire l'anisotropie avec une loi

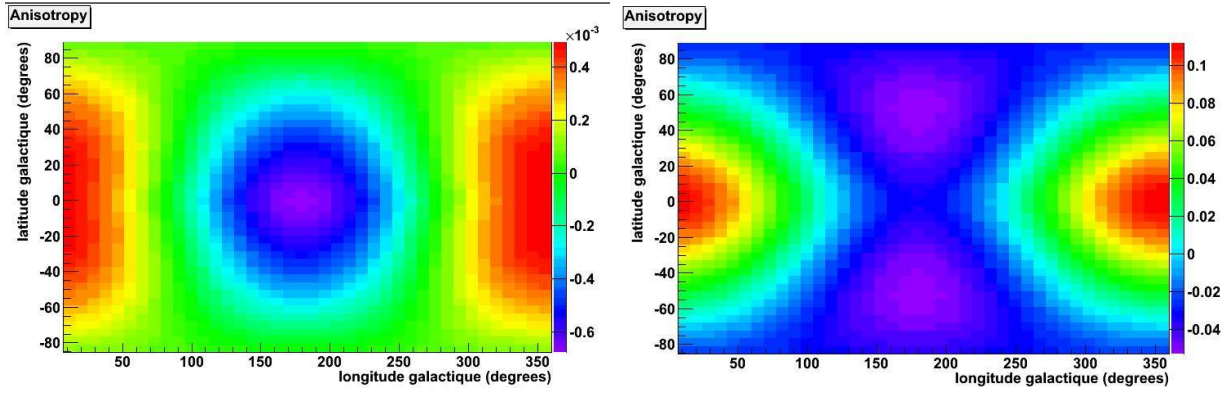


FIGURE 9.15: Cartes de l'anisotropie à 100 GeV et 100 TeV

de puissance. Cependant, en effectuant ce test entre 100 GeV et 10 GeV, nous trouvons une zones d'espace des paramètres compatibles avec les observations, cette zone est représentée sur la figure 9.16.

Avec des coordonnées logarithmiques pour le paramètre D_0 la zone correspondant aux meilleurs χ^2 est une droite qui peut être modélisée dans l'intervalle considéré par

$$D_0[\text{kpc}^2 \cdot \text{Myr}^{-1}] = 0.211 \times (1.78 \times 10^{-4})^\delta \quad (9.41)$$

Cette formule empirique n'est pas incompatible avec les paramètres du B/C. Pour certaines valeurs de L on retrouve un accord avec le B/C, par exemple avec $\delta = 0.6$, $D_0 = 1.8 \times 10^{-3} \text{ Myr}$ et $L = 2 \text{ kpc}$. D'autre part on voit que ce test statistique favorise $0.7 > \delta > 0.5$. Pour pouvoir aller plus loin avec cette étude et conclure sur la similitude ou non avec des paramètres types min, med et max, il faut étudier la phase de l'anisotropie, et pour cela convertir les cartes à la façon des expériences.

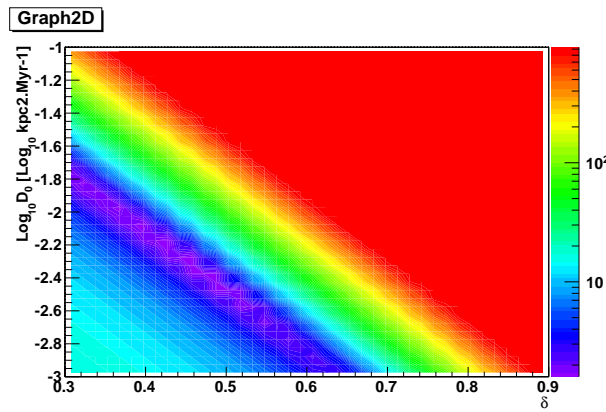


FIGURE 9.16: Résultats du test du χ^2 pour le modèle med. En couleur, les valeurs de χ^2/ndof

3.2 De la théorie aux expériences

Nous effectuons maintenant les mêmes calculs mais en convertissant les cartes pour les afficher à la manière des expériences et en calculant la première harmonique du signal décomposé. Sur la figure 9.17 on peut voir en rouge l'évolution de l'anisotropie mesurée en fonction de l'énergie. Cette figure est tracée dans le modèle med. Le résultat montre qu'à cause des effets de projection, l'anisotropie reconstruite est légèrement moins importante que l'anisotropie réelle. Dans ce système de coordonnées on voit plus clairement la dominance du dipôle. Son orientation vers le centre galactique (situé en $\alpha = 270^\circ$, $\delta = -30^\circ$) est ramenée vers $\delta = 0^\circ$ à cause des effets de projection. Notons que les expériences ne voient pas tout le ciel. Par conséquent les cartes que nous tracerons seront plutôt dans un hémisphère ou un autre. Tracer des demi-cartes limite le phénomène de réduction de l'anisotropie mesurée à cause des projections.

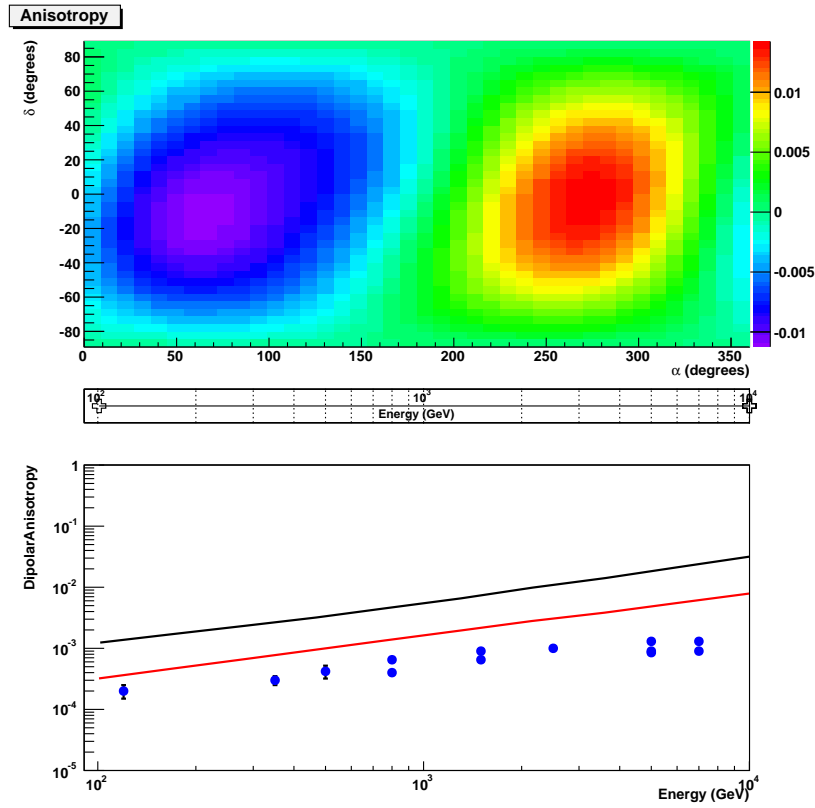


FIGURE 9.17: en haut : carte de l'anisotropie à 10 TeV dans le modèle med, telle que vue par les expériences. En bas : en noir l'anisotropie calculée dans le cadre de nos modèles, en rouge l'anisotropie mesurée par les expériences.

À haute énergie on note un étirement de la figure d'anisotropie (voir figure 9.18) provenant du fait que les sources du disque galactique prennent plus d'importance et que l'échappement devient également plus important. Cet effet est particulièrement marqué dans le cadre du disque mince.

Toute cette étude dans le cadre du modèle stationnaire offre le moyen d'obtenir une anisotropie dont l'amplitude est compatible avec les observations. Mais les comparaisons directes des cartes d'anisotropie montrent clairement que la phase n'est pas bonne. C'est pourquoi nous allons maintenant nous orienter vers d'autres explications pour essayer de trouver une figure d'anisotropie similaire aux expériences.

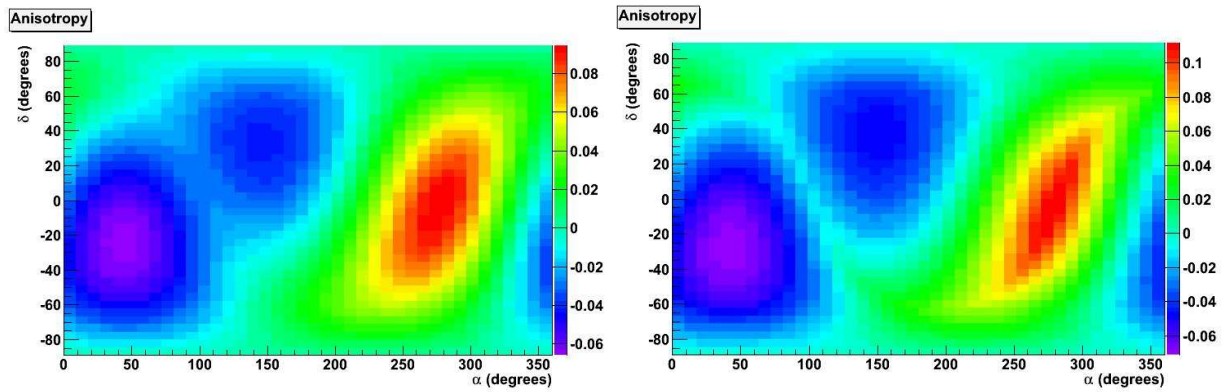


FIGURE 9.18: Carte de l'anisotropie à 10^5 TeV dans le cadre d'un disque épais (à gauche) et infiniment mince (à droite) (modèle med)

RÉFÉRENCES

- Abbasi, R., Adams, J., Aguilar, J. A., et al. 2010, ApJ, 718, L194
- Abdo, A. A., Allen, B. T., Aune, T., et al. 2008, ApJ, 698, 2121
- Aglietta, M., Alekseenko, V. V., Alessandro, B., et al. 2009, ApJ Letters, 692, L130
- Amenomori, M., Ayabe, S., Bi, X. J., et al. 2006, Science, 314, 439
- Amenomori, M., Bi, X. J., Chen, D., et al. 2010, ApJ, 711, 119
- Aublin, J. & Parizot, E. 2005, A&A, 441, 407
- Berezinskii, V. S. & Ginzburg, V. L. 1990, Astrophysics of cosmic rays (Amsterdam ; New York ; New York, N.Y., U.S.A. : North-Holland ; Sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier Science Pub. Co.)
- Blasi, P. & Amato, E. 2012, JCAP, 11
- Campana, D., Giaccari, U., Adriani, O., et al. 2013, Journal of Physics Conference Series, 409, 2055
- Compton, A. H. & Getting, I. A. 1935, Physical Review, 47, 817
- Desiati, P. & Lazarian, A. 2013, ApJ, 762, 44
- Di Sciascio, G. 2013, EPJWC, 52, 04004
- Di Sciascio, G., Iuppa, R., & Argo-Ybj Collaboration. 2012, Journal of Physics Conference Series, 375, 2008
- Duffett-Smith, P. 1988, Practical astronomy with your calculator (Cambridge [Cambridgeshire] ; New York : Cambridge University Press)
- Giacinti, G. & Sigl, G. 2012, PRL, 109, 71101
- Guillian, G., Hosaka, J., Ishihara, K., et al. 2007, PRD, 75, 62003
- IceCube Collaboration, Abbasi, R., Abdou, Y., et al. 2011, ApJ, 740, 16
- Lazarian, A. & Desiati, P. 2010, ApJ, 722, 188
- Linsley, J. 1975, PRL, 34, 1530
- Mihos, C. 2013, Astronomical Coordinates, <http://burro.cwru.edu/Academics/Astr306/Coords/coords.html>
- Mollerach, S. 2009, in AIP conference, Vol. 1123, 115–132
- Stockholm University. 2013, Current Sky View with Equatorial to Galactic Coordinate Conversion, <http://www.scrt.astro.su.se/docimage.php?file=galcoord.php&title=Current+Sky+View+with+Equatorial+to+Galactic+Coordinate+Conversion>
- Think Astronomy. 2008, Galactic Coordinates, http://www.thinkastronomy.com/M13/Manual/common/galactic_coords.html
- Weisstein, E. W. 2013, Galactic Coordinates – from Eric Weisstein’s World of Astronomy, <http://scienceworld.wolfram.com/astronomy/GalacticCoordinates.html>

L'environnement astrophysique local est inhomogène. On note particulièrement la présence d'un objet astrophysique que l'on appelle une bulle locale. C'est une zone composée d'une densité de matière inférieure à la moyenne (voir figure 10.1). La bulle a donc un effet sur les spallations des rayons cosmiques dans la zone locale. Cet effet a été étudié dans (Donato et al. 2002). C'est une zone qui a un rayon moyen d'environ 100 pc autour de nous et qui est située dans le disque de matière (Cox 1998).

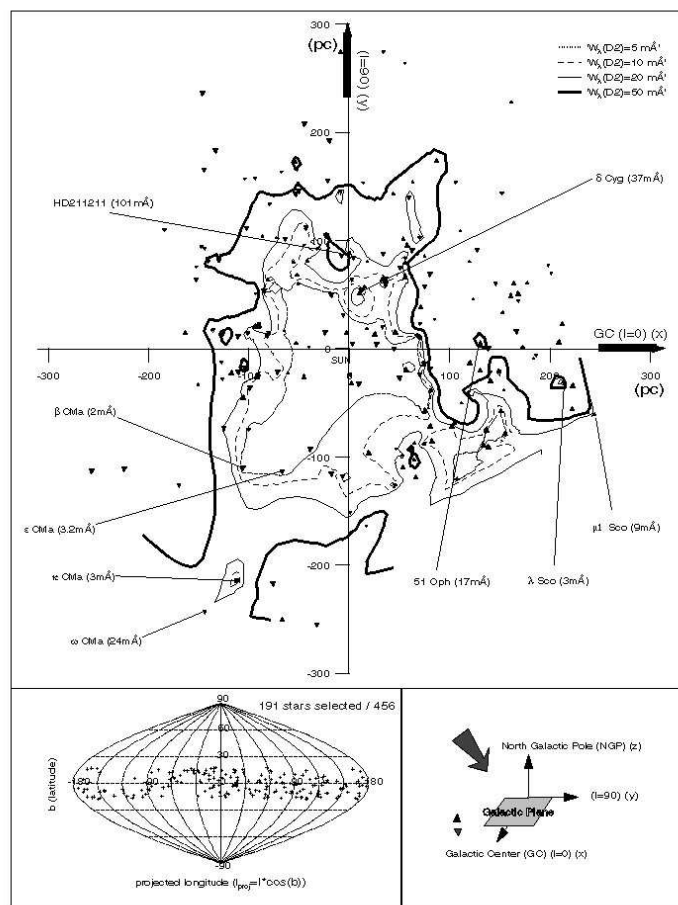


FIGURE 10.1: Schéma de la bulle locale (Cox 1998)

Une des hypothèses sur la formation de ces superbulles s'appuie sur des explosions de supernovæ locales. On suppose qu'après l'explosion, l'onde de choc produite balaye la zone locale. C'est particulièrement probable dans le cas d'explosions en chaîne de plusieurs supernovæ. Dans cette idée

(Gehrels & Chen 1993) émet l'hypothèse que c'est la supernova ayant engendré le pulsar Geminga qui est à l'origine de la bulle locale. L'onde de choc étant le lieu de présence d'un champ magnétique très turbulent différent du champ magnétique galactique, on peut supposer que cette onde de choc n'a pas uniquement changé la densité locale moyenne du milieu inter-stellaire mais également le coefficient de diffusion local. On peut opposer des contre-arguments à cette hypothèse. En effet, on peut supposer que les rayons cosmiques ont réatteint un équilibre depuis le passage de l'onde de choc et que le coefficient de diffusion est redevenu homogène.

Nous utiliserons donc l'argument de la superbulle pour étudier l'effet d'un coefficient de diffusion local différent du coefficient de diffusion moyen de la galaxie. En considérant que le coefficient de diffusion de la galaxie n'est pas homogène nous aurons une bonne approche des effets résultants. Pour finir, l'approche calculatoire adoptée nous permet également d'étudier l'effet d'un déséquilibre local dans la distribution de sources, élément qui montrera qu'il faut se pencher vers une étude de sources ponctuelles.

1 ÉTUDE DE L'EFFET DES SPALLATIONS ET DE LA DISTRIBUTION DE SOURCES

Ici l'équation à résoudre est celle de la diffusion dans le disque de matière. La diffusion dans le halo ne dépend pas de la bulle et on réutilisera les profils de densité calculés dans le cadre du disque épais. On a donc dans le halo magnétique une solution de la forme

$$\tilde{N}_i = P_i e^{V_c z/2D} \sinh(S_i(L - z)) \quad (10.1)$$

Pour conserver la symétrie cylindrique du système, on centrera la bulle sur le centre du repère et on considérera $R \rightarrow \infty$. De plus, la bulle est en fait considérée comme un trou cylindrique. On a donc l'équation suivante :

$$D(r)\Delta N(r, z) - \Gamma N(r, z)\Theta(r - Rb) = -q_0(r)$$

On commence par résoudre pour un coefficient de diffusion homogène $D(r) = D$, dans ce cas on a

Résolution avec une bulle locale

$$D\Delta N(r, z) - \Gamma N(r, z)\Theta(r - Rb) = -q_0$$

$$\frac{d^2 \tilde{N}_i(z)}{dz^2} - \left(\frac{\zeta_i}{R}\right)^2 \tilde{N}_i(z) - \frac{\gamma_i(z)}{D} = -\frac{\tilde{q}_{0i}}{D}$$

Avec

$$\begin{aligned} \gamma_i(z) &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\zeta_i)} \int_0^R r \Gamma N(r, z) \Theta(r - Rb) J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right) dr \\ &= \frac{2\Gamma}{J_1^2(\zeta_i)} \int_{\frac{Rb}{R}}^1 \rho N(\rho, z) J_0(\zeta_i \rho) d\rho \\ &= \frac{2\Gamma}{J_1^2(\zeta_i)} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{N}_j(z) \int_{\frac{Rb}{R}}^1 \rho J_0(\zeta_j \rho) J_0(\zeta_i \rho) d\rho \end{aligned}$$

Cette intégrale est tabulée (voir ([Gradshteyn et al. 2007](#))) et donne

$$\begin{aligned} \gamma_i(z) &= \frac{2\Gamma}{J_1^2(\zeta_i)} \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} \tilde{N}_j(z) \left\{ \frac{1}{\zeta_j^2 - \zeta_i^2} \left(\zeta_i J_0\left(\zeta_j \frac{Rb}{R}\right) J_1\left(\zeta_i \frac{Rb}{R}\right) - \zeta_j J_0\left(\zeta_i \frac{Rb}{R}\right) J_1\left(\zeta_j \frac{Rb}{R}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} J_1^2(\zeta_i) - \frac{1}{2} \left(\frac{Rb}{R}\right)^2 \left(J_0^2\left(\zeta_i \frac{Rb}{R}\right) + J_1^2\left(\zeta_j \frac{Rb}{R}\right) \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

On note :

$$\begin{aligned} Cd_i &= \left(\frac{\zeta_i}{R}\right)^2 + \frac{2\Gamma}{D J_1^2(\zeta_i)} \left(\frac{1}{2} J_1^2(\zeta_i) - \frac{1}{2} \left(\frac{Rb}{R}\right)^2 \left(J_0^2\left(\zeta_i \frac{Rb}{R}\right) + J_1^2\left(\zeta_j \frac{Rb}{R}\right) \right) \right) \\ Cd_i &:= \left(\frac{\zeta_i}{R}\right)^2 + \frac{\Gamma_{eff}(\zeta_i)}{D} \end{aligned} \quad (10.2)$$

et

$$\begin{aligned} Ca_{i,j} &= \frac{2\Gamma}{D J_1^2(\zeta_i)} \frac{1}{\zeta_j^2 - \zeta_i^2} \left(\zeta_i J_0\left(\zeta_j \frac{Rb}{R}\right) J_1\left(\zeta_i \frac{Rb}{R}\right) - \zeta_j J_0\left(\zeta_i \frac{Rb}{R}\right) J_1\left(\zeta_j \frac{Rb}{R}\right) \right) \\ Ca_{i,j} &:= \frac{\Gamma_b(\zeta_i, \zeta_j)}{D} \end{aligned} \quad (10.3)$$

L'équation de diffusion devient:

$$\frac{d^2 \tilde{N}_i(z)}{dz^2} - Cd_i \tilde{N}_i(z) - \sum_{j \neq i} Ca_{i,j} \tilde{N}_j(z) = -\frac{\tilde{q}_{0i}}{D} \quad (10.4)$$

On a donc un système infini d'équations différentielles couplées. Pour le résoudre on propose donc une résolution matricielle de la forme :

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{N}}}{dz^2} = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{N}} + \mathbf{Q}$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \tilde{N}_0 \\ \vdots \\ \tilde{N}_n \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{q}_0}{D} \\ \vdots \\ -\frac{\tilde{q}_n}{D} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} Cd_0 & Ca_{0,1} & \dots & Ca_{0,n} \\ Ca_{1,0} & Cd_1 & \dots & Ca_{1,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Ca_{n,0} & \dots & \dots & Cd_n \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système, on pose

$$\frac{d\tilde{\mathbf{N}}}{dz} = \mathbf{V} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{V}}{dz} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{N}} + \mathbf{Q} \quad (10.5)$$

Et on augmente la dimension du système pour construire

$$\mathbf{Y} := \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{N}} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{B}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix}$$

On se ramène donc à la résolution du système matriciel suivant :

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dz} = \mathbf{M} \mathbf{Y} + \mathbf{S} \quad (10.6)$$

La solution d'un tel système est donnée par

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_c e^{z\mathbf{M}} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \quad (10.7)$$

Avec \mathbf{Y}_c le vecteur des conditions initiales de résolution. On l'écrira

$$\mathbf{Y}_c = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \dots \\ \alpha_{2n} \end{pmatrix} \quad (10.8)$$

Ici la condition initiale porte sur \mathbf{Y} et implique donc des conditions aux limites mixtes sur \mathbf{N} et sur sa dérivée. Elles sont justement données par la règle de continuité de la densité N et par la continuité du flux. D'autre part, on a

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.9)$$

Pour résoudre l'équation la partie la plus délicate est d'inverser la matrice \mathbf{A} . Pour la suite rappelons la définition de l'exponentielle d'une matrice. On a

$$e^{z\mathbf{M}} = \sum_{n_0}^{\infty} \frac{[z\mathbf{M}]^n}{n!} \quad (10.10)$$

Pour obtenir les solutions on se ramène finalement à un calcul matriciel. Plutôt que de travailler avec l'inversion de la matrice \mathbf{M} , on va travailler avec les valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice. On pose

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1} \quad (10.11)$$

Ici \mathbf{T} correspond à la matrice des valeurs propres (notées λ_i) de \mathbf{M} et \mathbf{P} est la matrice de passage formée avec les vecteurs propres de \mathbf{M} . Cette matrice est donnée par

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 & \mathcal{V}_2 & \dots & \mathcal{V}_n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

où les \mathcal{V}_i sont les vecteurs propres de \mathbf{M} . On a alors

$$e^{z\mathbf{M}} = \sum_{n_0}^{\infty} \frac{[z\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1}]^n}{n!} = \mathbf{P} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{[z\mathbf{T}]^n}{n!} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} e^{z\mathbf{T}} \mathbf{P}^{-1} \quad (10.13)$$

En effet, grâce aux propriétés des matrices de passage, on a $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}$. On peut finalement écrire la

solution du rang i des indices de Bessel :

$$\begin{aligned}\tilde{N}_i &= \sum_{j_1}^{2n} \mathcal{V}_{i,j} e^{\lambda_j z} \alpha_j - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{Q})_i \\ \tilde{N}_i &= \sum_{j_1}^n \mathcal{V}_{i,j} e^{\lambda_j z} \alpha_j + \mathcal{V}_{i,j+n} e^{\lambda_{j+n} z} \alpha_{j+n} - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{Q})_i\end{aligned}\tag{10.14}$$

On note \mathcal{P} le vecteur qui porte le signe, et donc la parité de \mathcal{V} . On a donc $\mathcal{V}_{i,j} = |\mathcal{V}_{i,j}| \mathcal{P}_{i,j}$. On peut alors montrer que la solution peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{N}_i &= \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{i,j} |\mathcal{V}_{i,j}| e^{\lambda_j z} \alpha_j + \mathcal{P}_{i,j+n} |\mathcal{V}_{i,j}| e^{-\lambda_j z} \alpha_{j+n} - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{Q})_i \\ \tilde{N}_i &= \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{i,j} |\mathcal{V}_{i,j}| e^{\lambda_j z} \alpha_j + \mathcal{P}_{i,j+n} |\mathcal{V}_{i,j}| e^{-\lambda_j z} \alpha_{j+n} - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{Q})_i \\ \tilde{N}_i &= \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{i,j} |\mathcal{V}_{i,j}| \left(e^{\lambda_j z} \alpha_j + \mathcal{P}_{i,j+n} e^{-\lambda_j z} \alpha_{j+n} \right) - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{Q})_i\end{aligned}\tag{10.15}$$

On impose à la fonction \tilde{N}_i d'être paire pour assurer la symétrie de la densité par rapport au plan galactique, dans ce cas $\mathcal{P}_{i,j} \alpha_j = \mathcal{P}_{i,j+n} \alpha_{j+n}$. Pour finir, on notera \mathbf{P}_+ le bloc matriciel de la matrice \mathbf{P} limité au sous-espace de dimension $n \times n$, \mathbf{T}_+ la matrice des valeurs propres dans ce sous-espace et α_+ le vecteur des conditions initiales dans ce sous-espace. La solution est alors donnée par

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{P}_+ \left(e^{\mathbf{T}_+ z} + e^{-\mathbf{T}_+ z} \right) \alpha_+ - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Q}\tag{10.17}$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{P}_+ \mathbf{T}_+ \left(e^{\mathbf{T}_+ z} - e^{-\mathbf{T}_+ z} \right) \alpha_+\tag{10.18}$$

Il faut maintenant résoudre avec les conditions aux limites en $z = z_0 = h$ entre le disque et le halo. On note les solutions en $z = z_0$: $\mathbf{N0}$ et $\mathbf{V0}$. D'autre part les solutions dans le halo sont proportionnelles à P_i , on note donc, en utilisant les conditions aux limites mixtes données par la continuité de la densité et du flux

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{N0}} &= \mathbf{W}_1 \mathbf{P}_i \\ \tilde{\mathbf{V0}} &= \mathbf{W}_2 \mathbf{P}_i\end{aligned}\tag{10.19}$$

Ici nous ne détaillons pas directement les valeurs de \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 qui dépendent du coefficient de diffusion et du vent convectif. Nous cherchons le vecteur des conditions aux limites, c'est à dire α_+ pour déterminer complètement la solution. On trouve

$$\alpha_+ = \left[\mathbf{P}_+ \left(e^{\mathbf{T}_+ z_0} + e^{-\mathbf{T}_+ z_0} \right) - \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_2^{-1} \mathbf{P}_+ \mathbf{T}_+ \left(e^{\mathbf{T}_+ z_0} - e^{-\mathbf{T}_+ z_0} \right) \right]^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Q} \quad (10.20)$$

La résolution de cette équation implique une inversion de matrice de dimension n . Cet indice n n'est pas borné, il faut donc effectuer une étude spatiale pour le borner. On rappelle que l'on travaille avec une décomposition en série de Bessel d'une fonction, faisant donc intervenir $J_0(\zeta_i r/R)$, aussi, la résolution spatiale de l'ordre i est environ :

$$l \sim \frac{R}{\zeta_i}$$

Si on note R_b le rayon de la bulle locale, on considère que pour avoir une bonne résolution on cherche à travailler à des échelles d'environ $0.1 \times R_b$, on a donc

$$0.1 R_b = \frac{R}{\zeta_i} \longrightarrow \zeta_i = \frac{R}{0.1 R_b}$$

Pour finir on a $R = 20$ kpc et $R_b = 0.1$. Donc

$$\zeta_b \sim 1000$$

Cette valeur détermine l'échelle spatiale de la bulle. D'autre part, on peut délimiter deux régimes spatiaux : le premier dans lequel les effets de diffusion dominant nettement la spallation (appelé ici régime de diffusion pure) et le deuxième où les spallations dominant sur la diffusion. La diffusion agit principalement sur les petites échelles spatiales (i.e. les indices de Bessel élevés). Le régime de diffusion pure apparaîtra donc pour les i élevés. On voit également que la présence de la bulle couple les modes de Bessel dans l'équation de diffusion. Ces termes de couplage ne seront donc importants qu'aux échelles spatiales de la bulle (ζ_b vue plus haut).

On distingue deux échelles spatiales pour les phénomènes physiques : les spallations dominant les effets physique à grande échelle (nous l'avons vu dans la section 4 (page 151)), on note cette échelle ζ_s . Lorsque l'échelle spatial diminue, les solutions de l'équation deviennent sensible à la diffusion. À partir d'une dimension suffisamment petite, la diffusion domine la spallation, on note cette échelle ζ_d . Il existe aussi une échelle caractéristique en lien avec la géométrie du système. Les

petits ζ décrivent les grande échelles spatiales, qui sont homogènes d'après notre modèle. À partir d'une échelle caractéristique ζ_b de l'ordre de grandeur du rayon de la bulle, les termes de la somme dans la solution de l'équation de diffusion sont sensibles à la bulle. Pour résumer :

Du point de vue des phénomènes physiques : (ζ_s) Spallations pures \longrightarrow diffusion + spallations \longrightarrow (ζ_d) Diffusion pure

Et du point de vue de la géométrie du disque : Milieu homogène \longrightarrow (ζ_b) présence de la bulle

En fonction du rayon de la bulle on distingue deux cas : $\zeta_d \gg \zeta_b$ et $\zeta_d < \zeta_b$. Comme on travaille autour du TeV et $R_b = 0.1$ kpc un calcul numérique montre que l'on est dans le premier cas, la matrice **A** des coefficients Cd_i et $Ca_{i,j}$ se transforme donc en :

$$\begin{array}{c} \zeta_s \longrightarrow \zeta_d \longrightarrow \zeta_b \longrightarrow \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\Gamma_{eff}(\zeta_s)}{D} & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \left(\frac{\zeta_i}{R}\right)^2 + \frac{\Gamma_{eff}(\zeta_i)}{D} & & 0 & \\ \hline & & \left(\frac{\zeta_i}{R}\right)^2 + \frac{\Gamma_{eff}(\zeta_i)}{D} & & 0 & \\ 0 & & & \ddots & & \frac{\Gamma_b(\zeta_i, \zeta_j)}{D} \\ \hline & & 0 & & \left(\frac{\zeta_d}{R}\right)^2 & \\ & & & \frac{\Gamma_b(\zeta_i, \zeta_j)}{D} & & \left(\frac{\zeta_d}{R}\right)^2 + \frac{\Gamma_b(\zeta_i, \zeta_j)}{D} \\ 0 & & & & \frac{\Gamma_b(\zeta_i, \zeta_j)}{D} & \ddots \\ & & & & & \left(\frac{\zeta_d}{R}\right)^2 \end{array} \right) \end{array}$$

On ne considère donc les termes croisés qu'à partir de ζ_b . Mais comme les termes diagonaux sont très supérieurs aux termes croisés (car la diffusion domine largement la spallation), on peut même les négliger. Nous verrons que lorsqu'on considère deux coefficients de diffusion différents l'étude est légèrement plus compliquée. Ces approximations nous permettent simplement de réécrire la dynamique du système selon trois équations en fonction de l'échelle spatiale :

$$\frac{d^2 \tilde{N}_i(z)}{dz^2} - \frac{\Gamma_{eff}(\zeta_i)}{D} \tilde{N}_i(z) = -\frac{\tilde{q}_{0i}}{D} (\zeta_i \ll \zeta_d) \quad (10.21)$$

$$\frac{d^2 \tilde{N}_i(z)}{dz^2} - \left(\frac{\zeta_i}{R}\right)^2 \tilde{N}_i(z) = -\frac{\tilde{q}_{0i}}{D} (\zeta_d \ll \zeta_i \ll \zeta_b) \quad (10.22)$$

$$\frac{d^2 \tilde{N}_i(z)}{dz^2} - \left(\frac{\zeta_i}{R}\right)^2 \tilde{N}_i(z) = -\frac{\tilde{q}_{0i}}{D} (\zeta_i \gg \zeta_b) \quad (10.23)$$

Ces équations ont été résolues sous la même forme dans le chapitre 4. Pour la première solution il suffit de reprendre la solution générale de l'équation de diffusion et de faire tendre ζ_i vers 0. Pour la deuxième et la troisième il suffit de poser $\Gamma = 0$. En conséquence, ici, seul le terme source et le

calcul de Γ_{eff} portent formellement la trace de la forme de la bulle. De ce fait on étudie les effets de différentes formes du terme source.

Nous n'étudions pas ici l'effet de la bulle mais nous profitons du formalisme pour étudier l'effet de la forme du terme source (asymétrie et gradient). Commençons par choisir une zone du rayon de la bulle sans sources. On choisit :

$$q(r, z) = q_0 \Theta(R_b - r)$$

, qui est un terme qui s'arrête brutalement en $r = R_b$. On calcule l'anisotropie associée grâce à la formule :

$$\delta = \lambda \frac{1}{N} \frac{dN}{dr}$$

La courbe obtenue grâce à cette formule est représentée sur la figure 10.2 On peut voir que l'ani-

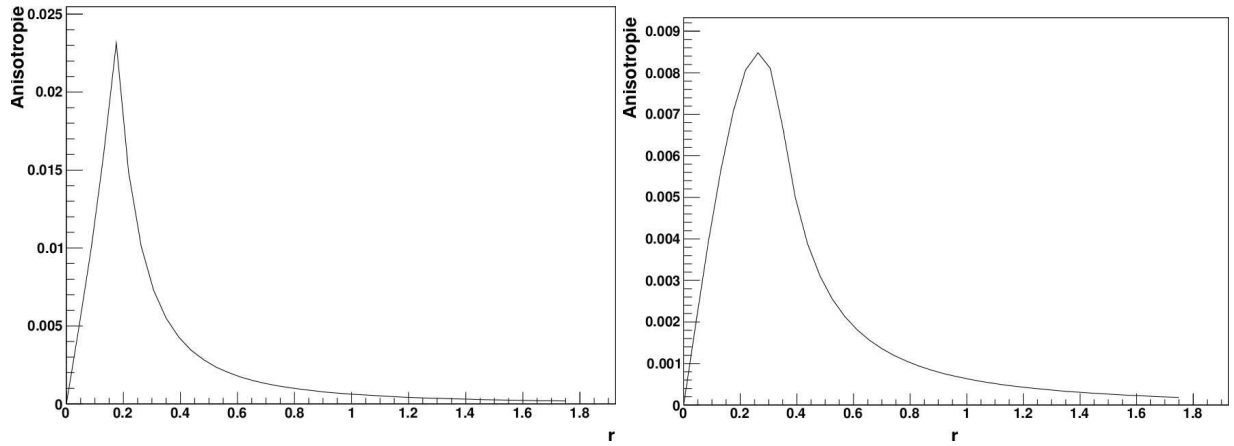


FIGURE 10.2: À gauche : anisotropie radiale dans le cadre d'une distribution discontinue de sources en $r = R_b$. À droite : anisotropie radiale dans le cadre d'une distribution continue de source en $r = R_b$.

sotropie est maximale et obtenue pour $r = R_b$ et son max est de 0.025, soit un ordre de grandeur au-dessus de celle observée. D'autre part, en $r = 0$ l'anisotropie est nulle, c'est une vérification du calcul. En effet, au centre de la bulle on s'attend à avoir dans le disque autant de sources dans toutes les directions. On effectue également le même calcul avec un terme source continu plus lissé donné par

$$\begin{aligned} q(r, z) &= 0 & 0 \leq r \leq R_b - \frac{1}{2a} \\ q(r, z) &= q_0 \left(a(r - R_b) + \frac{1}{2} \right) & R_b - \frac{1}{2a} < r < R_b + \frac{1}{2a} \\ q(r, z) &= q_0 & r \geq R_b + \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

Avec $a > 1/2R_b$. (Ce terme source permet de trouver les coefficients de Bessel associés de manière

analytique). On prend le cas où $b = 0$. L'anisotropie est représentée sur la figure 10.2

Le maximum de l'anisotropie est obtenue au niveau du rayon de la bulle et il est de 0.009, soit près de trois fois moins que dans le cas précédent. Nous pouvons en retirer deux informations importantes, premièrement plus le terme source est abrupte, et plus l'anisotropie peut être élevée. Notons que dans le cadre du choix de sources ponctuelles, le terme source est décrit par un delta de Dirac, on peut donc s'attendre à ce que l'anisotropie d'une source locale soit très importante. De plus si la distribution locale de sources n'est pas uniforme, alors une variation locale de distribution de sources doit faire naître une anisotropie. Cette étude motive donc clairement une étude sur les sources ponctuelles. Fermons cette parenthèse pour se pencher sur l'étude de l'effet d'un coefficient de diffusion local.

2 CAS D'UN COEFFICIENT DE DIFFUSION LOCAL

Nous traitons maintenant le cas où le coefficient de diffusion a une valeur différente à l'intérieur et à l'extérieur de la bulle. Ici, nous ne pouvons plus faire de simplifications comme précédemment sur les termes de la matrice \mathbf{B} . On ne peut plus se débarrasser des termes croisés. Aussi le calcul matriciel que nous venons d'effectuer va se montrer beaucoup plus utile.

On utilise maintenant un coefficient de diffusion de la forme $D(r) = (D - D_b)\Theta(r - R_b) + D_b$. Nous n'allons pas refaire l'étude détaillée de toute l'équation mais simplement des termes qui vont s'ajouter au calcul.

Résolution de l'équation

L'équation à résoudre est maintenant la suivante

$$(D(r)\Delta N)_i(z) - \frac{\gamma_i(\tilde{z})}{D} = -\frac{\tilde{q}_{0i}}{D}$$

Intéressons nous donc simplement au terme $(D(r)\Delta N)_i(z)$:

$$(D(r)\Delta N)_i(z) = \frac{2}{J_1^2(\zeta_i)R^2} \int_0^R J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right) ((D - D_b)\Theta(r - R_b) + D_b) \Delta N dr \quad (10.24)$$

Le calcul de l'intégrale, se fait en utilisant ([Gradshteyn et al. 2007](#)) et conduit à

$$\begin{aligned}
 (D(r)\tilde{\Delta}N)_i(z) = & \frac{2}{J_1^2(\zeta_i)R^2} \sum_j \left[\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{\zeta_j}{R} \right)^2 \right] \tilde{N}_j(z) \left\{ \right. \\
 & \frac{D}{\zeta_j^2 - \zeta_i^2} \left(\zeta_i \frac{R_b}{R} J_0 \left(\zeta_j \frac{R_b}{R} \right) J_1 \left(\zeta_i \frac{R_b}{R} \right) - \zeta_j \frac{R_b}{R} J_0 \left(\zeta_i \frac{R_b}{R} \right) J_1 \left(\zeta_j \frac{R_b}{R} \right) \right) (i \neq j) \\
 & + \frac{D}{2} \left[J_1^2(\zeta_i) - \left(\frac{R_b}{R} \right)^2 \left(J_0^2 \left(\zeta_i \frac{R_b}{R} \right) + J_1^2 \left(\zeta_i \frac{R_b}{R} \right) \right) \right] \delta_{ij} \\
 & + \frac{D_b}{\zeta_j^2 - \zeta_i^2} \left(-\zeta_i \frac{R_b}{R} J_0 \left(\zeta_j \frac{R_b}{R} \right) J_1 \left(\zeta_i \frac{R_b}{R} \right) + \zeta_j \frac{R_b}{R} J_0 \left(\zeta_i \frac{R_b}{R} \right) J_1 \left(\zeta_j \frac{R_b}{R} \right) \right) (i \neq j) \\
 & \left. + \frac{D_b}{2} \left[\left(\frac{R_b}{R} \right)^2 \left(J_0^2 \left(\zeta_i \frac{R_b}{R} \right) + J_1^2 \left(\zeta_i \frac{R_b}{R} \right) \right) \right] \delta_{ij} \right\}
 \end{aligned} \tag{10.25}$$

On peut paramétrer simplement cette expression pour obtenir

$$\begin{aligned}
 (D(r)\tilde{\Delta}N)_i(z) = & \sum_{i \neq j} \left[\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{\zeta_j}{R} \right)^2 \right] \tilde{N}_j(z) K_{a,ij}(D - D_b) \\
 & + \left[\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{\zeta_i}{R} \right)^2 \right] \tilde{N}_i(z) (K_{d,i}(D - D_b) + D_b)
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

On peut, du point de vue matriciel, reparamétrer l'équation totale pour obtenir une équation de la forme

$$\mathbf{A} \frac{d^2 \mathbf{N}}{dz^2} = \mathbf{B} \mathbf{N} + \mathbf{Q} \tag{10.27}$$

La résolution est très similaire à la précédente, la solution est donnée par

$$\mathbf{Y} = e^{z\mathbf{M}} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} \tag{10.28}$$

avec

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix} \tag{10.29}$$

$$\mathbf{S} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

La résolution est à partir d'ici la même que précédemment, on peut donc se contenter d'écrire les solutions

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{P}_+ \left(e^{\mathbf{T}_+ z} + e^{-\mathbf{T}_+ z} \right) \alpha_+ \quad (10.30)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}_+ \mathbf{T}_+ \left(e^{\mathbf{T}_+ z} - e^{-\mathbf{T}_+ z} \right) \alpha_+ \quad (10.31)$$

L'inconnue à déterminer avec les conditions aux limites est α_+ . Elles sont différentes du calcul précédent étant donné que D dépend de r , on a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 \mathbf{P}_i &= \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{0} \\ (\mathbf{W}_2 \mathbf{P}_i)_i &= \left(D(r) \frac{d^2 \tilde{\mathbf{N}}}{dz^2} \right)_i \\ (\mathbf{W}_2 \mathbf{P}_i)_i &= \frac{2}{J_1^2(\zeta_i)} \left[\sum_{j \neq i} \frac{d \tilde{N}_j}{dz} K_{a,ij} (D - D_b) + \frac{d \tilde{N}_i}{dz} \left(K_{d,i} (D - D_b) + \frac{D_b}{2} J_1^2 \zeta_i \right) \right] \end{aligned} \quad (10.32)$$

On notera cette expression sous forme matricielle

$$\mathbf{W}_2 \mathbf{P}_i = \mathbf{C} \mathbf{V}_0 \quad (10.33)$$

La résolution est donc encore une fois très similaire au cas précédent, il faut simplement prendre en compte l'ajout de la matrice \mathbf{C} ce qui donne

$$\alpha_+ = \left[\mathbf{P}_+ \left(e^{\mathbf{T}_+ z_0} + e^{-\mathbf{T}_+ z_0} \right) - \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_2^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_+ \mathbf{T}_+ \left(e^{\mathbf{T}_+ z_0} - e^{-\mathbf{T}_+ z_0} \right) \right]^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Q} \quad (10.34)$$

La solution est obtenue en injectant cette expression dans (10.30).

Il n'est pas possible ici de faire des approximations sur les différents termes matriciels. Le rang du calcul est toujours évalué avec la règle

$$0.1 R_b = \frac{R}{\zeta_i} \longrightarrow \zeta_i = \frac{R}{0.1 R_b}$$

Ce qui donne une valeur de i autour de 10^4 . La valeur de D est fixée au modèle med. La valeur de D_b est plus problématique, il n'existe pas de prescription la concernant. On peut supposer que la nature de la turbulence est la même. En effet le mécanisme de génération de la turbulence magnétique n'a pas de raison évidente d'être différent dans la bulle. On change donc la valeur de D_0 . Le choix est arbitraire, pour avoir un ordre d'idée on utilise l'analogie du coefficient de diffusion avec (5.2). Dans

ce terme la diffusion est inversement proportionnelle au carré de la turbulence : $D_0 \sim 1/\delta B^2$. Une turbulence dans la bulle, avec une amplitude 2 fois plus faible, engendre un facteur 4 sur le coefficient de diffusion local. On prendra cette valeur comme référence. De plus, pour engendrer une anisotropie, il faut postuler que nous ne sommes pas tout à fait au centre de la bulle. La figure 10.1 nous suggère que ce n'est effectivement pas le cas, il semble que nous sommes plus proches de la frontière de la bulle dans la direction du centre galactique. Ici pour modéliser cette asymétrie, nous nous placerons à une position décalée de 20 parsecs par rapport au centre de la bulle.

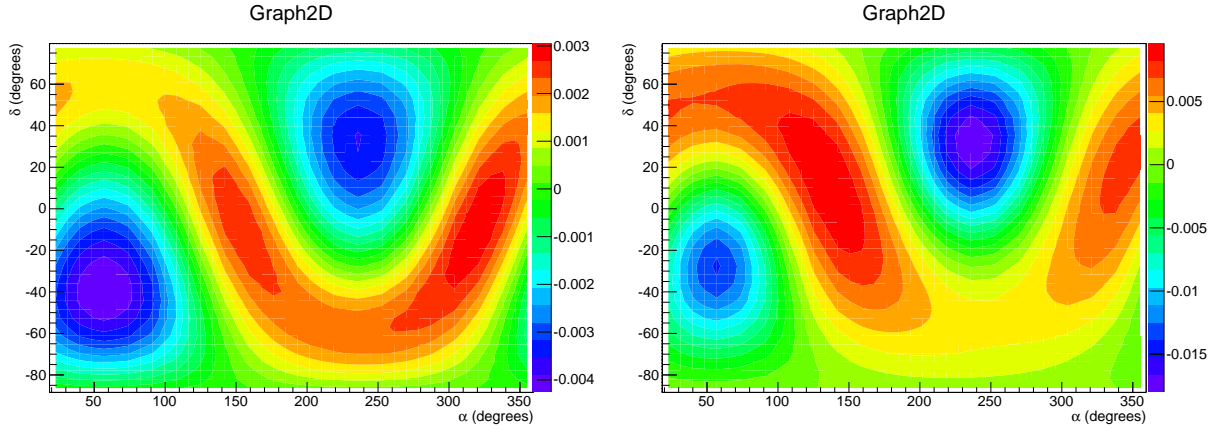


FIGURE 10.3: Carte de l'anisotropie obtenue avec une distribution continue de sources dans le modèle med à 10 TeV. À gauche $D_{\text{bulle}} = 4 \times D_{\text{galaxy}}$, $D_{\text{bulle}} = 0.25 \times D_{\text{galaxy}}$.

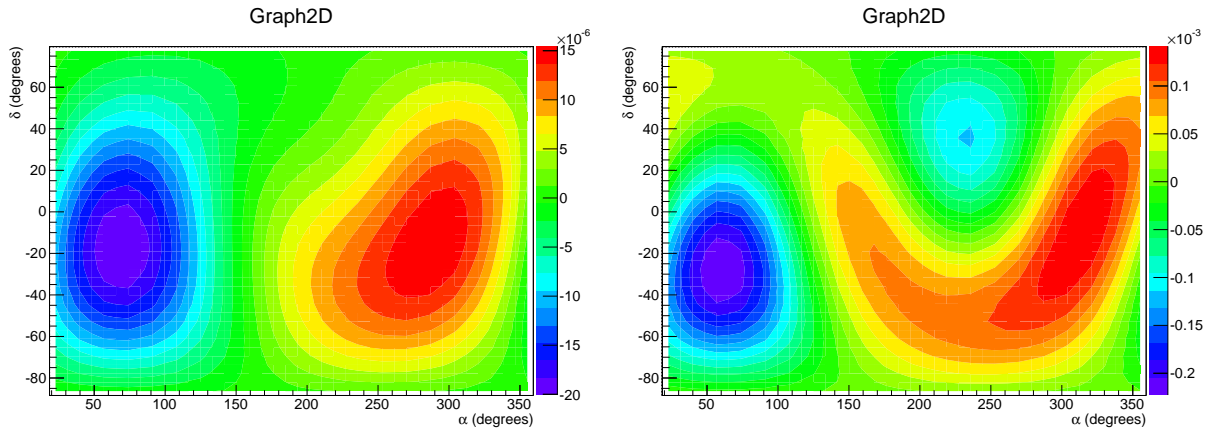


FIGURE 10.4: Carte de l'anisotropie obtenue avec une distribution continue de sources dans le modèle med avec $D_{\text{bulle}} = 4 \times D_{\text{galaxy}}$. À gauche à 100 GeV, à droite à 1 TeV.

Le résultat est représenté sur la figure 10.3. Étant donné le choix d'une distribution de sources uniforme dans le disque, on s'attend effectivement à ce que le disque galactique apparaisse très marqué dans les résultats. Mais plus intéressant, on distingue dans le disque à petite échelle un maximum

local vers le centre galactique et un minimum local dans la direction de l'anticentre. Ces effets sont environ 10 fois moins élevés que les effets d'anisotropie provenant de la distribution de sources. L'effet est inversé lorsque le coefficient de diffusion dans la bulle est 4 fois plus faible que dans la galaxie (on remarque de légères distorsions sur la figure issues de la projection des résultats à la façon des expériences). Nous avons également tracé cette figure pour 100 GeV et 1 TeV (voir figure 10.4). Ces figures montrent, qu'en-dessous d'une certaine énergie, l'effet domine sur l'effet de répartition dans le disque. Néanmoins il est de l'ordre de 10^{-5} soit un ordre de grandeur en dessous de l'anisotropie observée et il génère des structures à moyenne échelle spatiale. Une étude complète pourrait être menée avec une géométrie plus détaillée de la bulle cependant, l'anisotropie résultante dépend complètement du rapport $D_{\text{bulle}}/D_{\text{galaxy}}$. L'incertitude complète sur ce rapport implique de mener une étude complète sur l'environnement local galactique. Pour nous, l'important est de repérer que ces effets sont des effets sur de moyennes échelles angulaires, il est donc possible que certaines structures soient provoquées par un coefficient de diffusion local. D'autre part la forme de la bulle est moins précise que celle prise en compte, ce qui veut dire que ses effets apparents devraient être beaucoup moins réguliers.

Nous passons maintenant à l'étude de l'anisotropie dans un modèle non stationnaire avec sources ponctuelles. Nous avons donné dans cette partie les principales motivations de l'étude d'un tel modèle. La nature ponctuelle du terme source peut à elle seule engendrer une forte anisotropie, de plus une répartition locale Inhomogène de sources peut également être source d'anisotropies.

RÉFÉRENCES

- Cox, D. P. 1998, LNP, 506, 121
- Donato, F., Maurin, D., & Taillet, R. 2002, A&A, 381, 539
- Gehrels, N. & Chen, W. 1993, Nature, 361, 706
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Jeffrey, A., & Zwillinger, D. 2007, Table of Integrals, Series, and Products
- Sfeir, D. M., Lallement, R., Crifo, F., & Welsh, B. Y. 1999, AAS, 194, 947

11

L'ANISOTROPIE DES SOURCES PONCTUELLES

Nous avons vu au chapitre précédent qu'une source proche avec une étendue spatiale très localisée engendre naturellement une très forte anisotropie. Cet effet s'explique lorsqu'on considère l'écriture du terme d'anisotropie sous la forme d'un gradient. Dans ce cas, une source très piquée engendrera un flux lui aussi très piqué et donc avec un fort gradient à sa proximité. La question qu'on se pose dans ce chapitre est de savoir ce qui se passe lorsque l'on met plusieurs sources ensemble. On peut s'attendre à ce, que pour un nombre de sources infiniment grand, le gradient induit par une seule source disparaisse progressivement. Pour traiter le problème nous serons amenés à reprendre la même discussion que dans la partie II : la variance de l'anisotropie provenant de la distribution statistique des sources ponctuelles est-elle suffisante pour assurer des valeurs d'anisotropie très éloignées de la valeur moyenne ? Nous reprendrons brièvement les calculs de valeur moyenne de l'anisotropie, puis nous montrerons qu'à l'image de la valeur moyenne, le moment d'ordre 2 de la distribution diverge. Nous ne referons pas l'étude complète statistique puisque nous possédons les outils pour faire disparaître cette divergence, nous verrons qu'à l'opposé du flux de protons, la variance extérieure de l'anisotropie pose également problème. Enfin nous donnerons des pistes pour calculer la variance du quadripôle.

1 L'ANISOTROPIE DANS LE MODÈLE DE LA MYRIADE

Nous pouvons traiter les sources ponctuelles dans deux classes de modèles : de manière stationnaire ou non. Le modèle stationnaire pose problème aux énergies élevées : à ces énergies, les sources proches (situées à environ 100 pc de nous) résident dans la sphère délimitée par la surface de dernière diffusion (voir figure 9.2). Les cosmiques provenant de ces sources se propageraient donc en ligne droite jusqu'à nous et illumineraient le ciel ponctuellement. La présence de sources dépendantes du temps fait disparaître ce problème qui n'a en fait pas de sens physique. En effet, les cosmiques issus de chaque source sont assurés d'être entrés en régime de diffusion.

Ici le flux du rayonnement cosmique nous importe peu, en effet, l'anisotropie calculée analytiquement est le rapport du flux avec son gradient. Ce rapport, pour une énergie donnée, fait disparaître le terme source ainsi que le facteur $v/(4\pi)$, c'est pourquoi nous pouvons nous contenter de faire tous les calculs sur la densité, ou encore directement sur le propagateur. Dans ce cadre, en considérant N

sources dans la galaxie, la densité totale est donnée par

$$G_N = \sum_{p=1}^N G_p(r, z) \quad (11.1)$$

L'anisotropie dipolaire est donc donnée par

$$\delta_{dip} = \lambda \frac{\sqrt{\left(\sum_{p=1}^N \partial_x G_p(r, z, t)\right)^2 + \left(\sum_{p=1}^N \partial_y G_p(r, z, t)\right)^2 + \left(\sum_{p=1}^N \partial_z G_p(r, z, t)\right)^2}}{G_N} \quad (11.2)$$

On ne peut donc pas exprimer la valeur totale de l'anisotropie en sommant directement la valeur de δ_{dip} source par source. Cependant, on peut s'intéresser au rapport du gradient d'une source sur le flux total, soit pour la source j :

$$\delta_i^j = \lambda \frac{\partial_i G_j(x, y, z, t)}{G_N} \quad (11.3)$$

La somme de ces composantes permet bien de retrouver :

$$\delta_i = \lambda \frac{\sum_{p=1}^N \partial_i G_p(x, y, z, t)}{G_N} \quad (11.4)$$

On peut donc étudier les composantes d'anisotropies de chaque source indépendamment et les sommer par la suite.

De la même manière on ne peut pas calculer directement la moyenne totale, mais on peut calculer la moyenne de chaque composante de l'anisotropie. En effet en considérant une distribution de sources $f(x, y, z, t)$ on a

$$\langle \delta_i \rangle = \lambda \left\langle \frac{\partial_i G_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s, t_s)}{G_N} \right\rangle \quad (11.5)$$

La moyenne d'une fraction n'est pas égale à la fraction des moyennes, donc le calcul est en apparence plus compliqué que dans le cas de la valeur moyenne. Cependant, si on se ramène à un cas où la variance du propagateur est faible, alors on peut assimiler G_n à $\langle G_n \rangle$. Le propos de la partie précédente a été de montrer que la variance du propagateur était en fait, dans la majorité des cas suffisamment faible pour être négligée, on fera donc cette approximation. On a donc

$$\langle \delta_i \rangle = \lambda \frac{\langle \partial_i G_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s, t_s) \rangle}{\langle G_N \rangle} \quad (11.6)$$

Pour obtenir toutes les informations sur l'anisotropie, il faut donc calculer la variance et la moyenne du gradient du propagateur. En effet, le calcul de la moyenne du propagateur a déjà été développée

dans la partie précédente, il est donc inutile d'y revenir. Commençons par étudier le comportement de la moyenne et de la variance dans un cas simple : une distribution uniforme de sources dans un disque infiniment mince.

1.1 Calcul de la variance dans le cadre d'un modèle simple

Nous commençons par nous placer dans un cadre relativement simple pour comprendre le comportement de la variance de l'anisotropie. On travaille donc dans le cadre de sources réparties uniformément dans un disque infiniment mince. On a, pour une source située à une position relative (r, z) , en présence d'un halo diffusif de demi-épaisseur L , avec des sources toutes situées de façon homogène dans le plan $z = 0$ et en négligeant le vent convectif le propagateur d'une source donné par :

$$G_p(r, z, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-r^2/4Dt} \sum_n \frac{e^{-\alpha_n t}}{c_n} \sin(k_n L) \sin(k_n(L - |z|)) \quad (11.7)$$

Nous avons montré (cf équation (6.3) (page 163)) que dans ce contexte, la moyenne du propagateur pour N sources s'écrit :

$$\langle G_N \rangle = \frac{\nu L}{2D}.$$

Dans l'encadré suivant on détaille le calcul de la moyenne et de la variance de ce propagateur.

Calcul de la moyenne et de la variance du gradient radial

La dérivée radiale est donnée par

$$\partial_r G_p(r, z = 0, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \left(\frac{-2r}{4Dt} \right) e^{-r^2/4Dt} \sum_n \frac{e^{-\alpha_n t}}{c_n} \sin^2(k_n L) \quad (11.8)$$

Ici les coordonnées se réfèrent aux âges et positions des sources. Étant donné que les sources sont réparties dans un disque infiniment mince, la contribution selon z est simplifiée.

$$\partial_r G_p(r, z = 0, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \left(\frac{-2r}{4Dt} \right) e^{-r^2/4Dt} \sum_n \frac{e^{-k_n^2 Dt}}{L} \sin(k_n(L - |z|)) \sin(k_n L) \quad (11.9)$$

Pour calculer la variance il faut calculer la moyenne de ce terme ainsi que son moment d'ordre 2. Cependant, le modèle considère une distribution de sources homogène, on ne s'attend donc pas, en

moyenne, à observer de gradient dans le flux. C'est pourquoi on peut affirmer que la valeur moyenne est nulle. Nous calculons donc simplement le moment d'ordre 2 :

$$(\partial_r G_p)^2 = \frac{r^2}{64\pi^2 D^4 t^4} e^{-r^2/2Dt} \sum_n \sum_m \frac{e^{-\alpha_n t}}{c_n} \frac{e^{-\alpha_m t}}{c_m} \sin(k_n L) \sin(k_m L) \sin(k_n(L - |z|)) \sin(k_m(L - |z|)) \quad (1.10)$$

Par ailleurs, la limite basse des mesures d'anisotropie se situe autour de 100 GeV, nous pouvons donc négliger vent convectif et spallations à ces énergies. Dans ce cadre, en reprenant le détail de la résolution de l'équation de propagation pour une source ponctuelle, on peut montrer que

$$\alpha_n = Dk_n^2 \quad \text{et} \quad \cos(k_n L) = 0 \quad \text{soit} \quad k_n L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

et

$$c_n = \int_{-L}^{+L} \sin^2(k_n(L - |z|)) dz = L - \frac{\sin(2k_n L)}{2k_n} \quad \text{soit} \quad c_n = L$$

Comme $\cos(k_n L) = 0$, on a aussi $\sin^2(k_n L) = 1$. Il a également été montré que, dans ce contexte, les fonctions de base du développement du propagateur selon z sont orthogonales. L'intégrale de leur produit est nulle si les indices n et m sont différents. Donc

$$(\partial_r G_p)^2 = \frac{r^2}{64\pi^2 D^4 t^4} e^{-r^2/2Dt} \sum_n \frac{e^{-2\alpha_n t}}{c_n^2} \sin^2(k_n L) \sin^2(k_n(L - |z|)) \quad (11.11)$$

soit, dans le cas de sources distribuées dans le disque galactique supposé infiniment fin, après intégration sur z

$$\begin{aligned} \langle (\partial_r G_p)^2 \rangle &= \frac{1}{\pi R^2 2hT} \int 2\pi r dr \int dt \frac{r^2}{64\pi^2 D^4 t^4} e^{-r^2/2Dt} \sum_n \frac{e^{-2\alpha_n t}}{c_n^2} \sin^4(k_n L) \\ \langle (\partial_r G_p)^2 \rangle &= \frac{2}{64\pi^2 R^2 2hT} \int r dr \int dt \frac{r^2}{D^4 t^4} e^{-r^2/2Dt} \sum_n \frac{e^{-2\alpha_n t}}{c_n^2} \sin^4(k_n L) \end{aligned} \quad (11.12)$$

L'intégrale radiale est tabulée ([Gradshteyn et al. 2007](#)). Elle vaut :

$$I' = \int_0^\infty 2\pi r dr r^2 e^{-r^2/2Dt} = 8\pi D^2 t^2 \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx \quad (11.13)$$

Or, cette dernière intégrale vaut 1/2, ce qui donne

$$I' = 4\pi D^2 t^2$$

et

$$\langle (\partial_r G_p)^2 \rangle = \frac{1}{\pi R^2 2hT} \int dt \frac{\pi}{16\pi^2 D^2 t^2} \sum_n \frac{e^{-2\alpha_n t}}{c_n^2} \sin^4(k_n L) \quad (11.14)$$

L'intégrale sur t s'écrit (cf ([Gradshteyn et al. 2007](#)))

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{e^{-t}}{t^2} = -E_1(t_1) + E_1(t_2) - \frac{e^{-t_2}}{t_2} + \frac{e^{-t_1}}{t_1} \quad (11.15)$$

où E_1 désigne l'exponentielle intégrale de rang 1 ($E_1(x) = -E_{-1}(x)$ cf ([Weisstein 2013](#))). Ici,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{e^{-2\alpha_n t}}{t} = -E_1(2\alpha_n t_1) + E_1(2\alpha_n t_2) - \frac{e^{-2\alpha_n t_2}}{2\alpha_n t_2} + \frac{e^{-2\alpha_n t_1}}{2\alpha_n t_1} \quad (11.16)$$

Pour $t_2 \rightarrow \infty$, l'exponentielle intégrale ainsi que l'exponentielle tendent vers zéro, et on a plus simplement

$$\int_{t_1}^{\infty} dt \frac{e^{-2\alpha_n t}}{t} = \frac{e^{-2\alpha_n t_1}}{2\alpha_n t_1} - E_1(2\alpha_n t_1) \quad (11.17)$$

On obtient finalement

$$\langle (\partial_r G_p)^2 \rangle = \frac{1}{R^2 2hT} \frac{1}{16\pi^2 K} \sum_n \left(\frac{e^{-2\alpha_n t_1}}{2\alpha_n t_1} - E_1(2\alpha_n t_1) \right) \frac{1}{c_n^2} \sin^4(k_n L) \quad (11.18)$$

Cette expression diverge pour $t_1 \rightarrow 0$. Donc, dans un cadre sans spallation et sans vent convectif, la moyenne du carré diverge pour des petits temps. Nous allons donc pouvoir réutiliser les outils développés précédemment. Dans notre cas, nous étudierons, dans un premier temps la variance, de la zone extérieure. L'écart-type de la zone locale sera traité avec les incertitudes sur les positions des sources. Par ailleurs, dans ce modèle, la variance de l'anisotropie selon l'axe z est nulle car les sources sont forcées à $z = 0$, mais pour des distributions réalistes ce n'est plus le cas.

Nous calculons maintenant les moments du propagateur pour une distribution réaliste de sources. Dans ce cas, pour étudier les variances dans les différentes directions de l'espace, nous développons

l'anisotropie suivant ses composantes vectorielles :

$$\begin{aligned}\langle \delta_i \rangle &= \lambda \frac{\langle \partial_i G_p \rangle}{\langle G_N \rangle} \\ \langle \delta_i^2 \rangle &= \lambda^2 \frac{\langle (\partial_i G_p)^2 \rangle}{\langle G_N \rangle^2}\end{aligned}\quad (11.19)$$

Dans notre système de coordonnées, l'axe x pointe vers le centre de la galaxie, et l'axe z vers le bord vertical. Nous utilisons une distribution de sources à symétrie cylindrique. Dans ce cas, la moyenne de l'anisotropie selon l'axe y sera nulle. Par ailleurs, la distribution verticale de sources est elle aussi symétrique, donc la moyenne du gradient le long de la direction z sera également nulle. Il suffit donc de calculer la moyenne du gradient selon x . Cependant, les écarts-types ne sont pas nuls, il faut donc en principe les calculer pour toutes les dimensions.

1.2 Calcul de la variance de δ_i

Nous exposons ici la méthode pour calculer la variance de l'anisotropie dans le cadre d'une distribution réaliste de sources. La dérivée du propagateur s'écrit :

$$\partial_i G_p(x, y, z = 0, t) = \frac{1}{4\pi D t} e^{-r^2/4Dt} \frac{e^{-\alpha_n t}}{c_n} g_{i,n}(r, \theta, z, t) \sin(k_n L) \quad (11.20)$$

En utilisant $r^2 = (x - x_\odot)^2 + y^2$, le terme $g_{i,n}$ est défini comme :

$$\begin{aligned}g_{x,n} &= \frac{-2(x - x_\odot)}{4Dt} = \frac{-2(r \cos \theta - x_\odot)}{4Dt} \\ g_{y,n} &= \frac{-2y}{4Dt} = \frac{-2r \sin \theta}{4Dt} \\ g_{z,n} &= -\text{sgn}(z) k_n \cos(k_n (L - |z|))\end{aligned}\quad (11.21)$$

Pour calculer la valeur moyenne, nous utilisons la distribution radiale de pulsars de Yusifov et Küçük. En ce qui concerne le profil vertical, il est donné par :

$$f_z(z) = e^{-|z|/h} \quad (11.22)$$

On a donc

$$\begin{aligned}\langle \partial_i G_p \rangle &= \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \int_0^{2\pi} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \int_{-L}^L dz r dr d\theta dt \\ & f_r(r) e^{-|z|/h} \frac{A}{4\pi D t} e^{-r^2/4Dt} \sum_n \frac{e^{-\alpha_n t}}{c_n} g_{i,n}(r, \theta, z, t) \sin(k_n L)\end{aligned}\quad (11.23)$$

L'intégration de la partie angulaire de l'intégrale de $\partial_z G_p$ implique l'intégration du terme $g_{y,n}$. Cette intégrale est nulle. On pourrait aussi montrer que le calcul de $\int \partial_z G_p$ est nul, mais des arguments physiques permettent de ne pas la calculer. En effet, il est en fait tout à fait normal de trouver des valeurs moyennes nulles sur θ et z car les distributions de sources utilisées sont symétriques par rapport à ces coordonnées.

On pourrait montrer que l'intégrale sur r et t converge, même si $r \rightarrow 0$ et $t \rightarrow 0$, cependant, nous n'allons pas utiliser cette moyenne dans cette limite. En effet, comme dans la partie II de cette thèse, nous traiterons la zone locale (définie pour $r < 2$ kpc $t < 3 \times 10^4$ ans) avec un catalogue de sources locales.

Nous montrons maintenant l'expression des moments d'ordre 2 associés aux distributions :

$$\begin{aligned}
 (\partial_x G_p)^2 &= \frac{(r \cos \theta - x_\odot)^2}{64\pi^2 D^4 t^4} e^{-r^2/2Dt} \sum_n \sum_m \frac{e^{-\alpha_n t}}{c_n} \frac{e^{-\alpha_m t}}{c_m} \sin(k_n L) \sin(k_n(L - |z|)) \sin(k_m L) \sin(k_m(L - |z|)) \\
 (\partial_y G_p)^2 &= \frac{(r \sin \theta)^2}{64\pi^2 D^4 t^4} e^{-r^2/2Dt} \sum_n \sum_m \frac{e^{-\alpha_n t}}{c_n} \frac{e^{-\alpha_m t}}{c_m} \sin(k_n L) \sin(k_n(L - |z|)) \sin(k_m L) \sin(k_m(L - |z|)) \\
 (\partial_z G_p)^2 &= \frac{1}{16\pi^2 D^2 t^2} e^{-r^2/2Dt} \sum_n \sum_m \frac{e^{-\alpha_n t}}{c_n} \frac{e^{-\alpha_m t}}{c_m} k_n k_m \cos(k_n(L - |z|)) \sin(k_n L) \cos(k_m(L - |z|)) \sin(k_m L)
 \end{aligned} \tag{11.24}$$

Ici, avec la distribution de sources le long de l'axe z , et donc l'apparition d'une fonction $\exp(-z/h)$ dans l'intégration selon z , il n'est plus possible d'utiliser la propriété d'orthogonalité des fonctions de base. On ne peut donc pas se débarrasser de la double somme, ce qui rend le calcul numérique assez long. Néanmoins, l'intégrale selon z peut être calculée analytiquement (pour les dérivées selon x et y l'intégrale est donnée par 1).

Avec ces formules nous pouvons calculer la valeur moyenne de l'anisotropie et la variance de la zone extérieure. Les résultats sont donnés sur la figure 11.1 sur laquelle on a directement représenté l'amplitude de l'anisotropie. La majorité du signal provient de l'anisotropie le long de la direction x sur laquelle la distribution de sources n'est pas uniforme. On a également tracé sur cette figure l'anisotropie donnée par les sources du catalogue. On remarque que la variance théorique de la zone extérieure est importante. À basse énergie elle est d'un ordre de grandeur au-dessus de la valeur moyenne dans le modèle med.

Ce point est particulièrement épineux, c'est pourquoi avant de poursuivre l'étude, on s'intéresse à

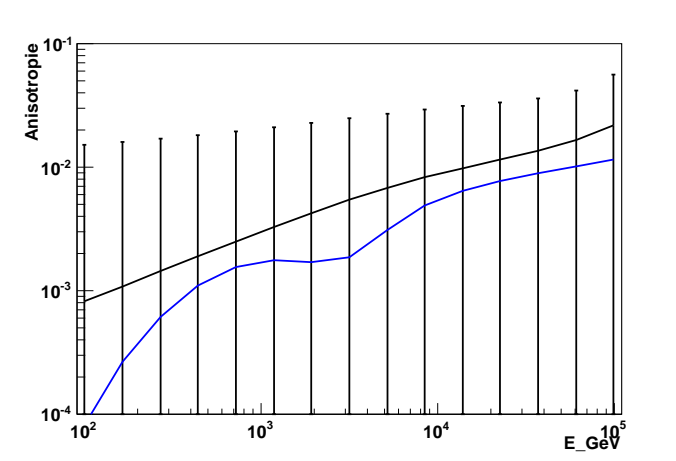


FIGURE 11.1: Anisotropie et écart-type de la zone extérieure (en noir) et anisotropie du catalogue (en bleu) pour le modèle med et $\nu = 3$

l'intervalle de confiance à 68% de l'anisotropie. Le calcul numérique reporté sur la figure 11.2 montre que cet intervalle est beaucoup plus petit que la variance. Nous sommes dans le cadre de distributions statistiques pathologiques. Ici le problème est encore plus marqué que dans le calcul du flux de protons. En effet, même après avoir supprimé la zone locale, nous ne pouvons pas appliquer le théorème central limite. Les outils idéaux pour traiter le problème sont ceux de la théorie des distributions stables qui fournissent directement les quantiles de la distribution. Cette étude est toujours en cours et permettra de délimiter tout les intervalles de confiance. Le résultat montre que le choix de la zone locale permet d'obtenir des incertitudes relativement faibles. D'autre part, dans tous les modèles, l'anisotropie du catalogue est de l'ordre de grandeur de l'anisotropie du signal, il est donc important d'étudier, d'une part les incertitudes liées au catalogue, et d'autre part les composantes moyennes de l'anisotropie du catalogue.

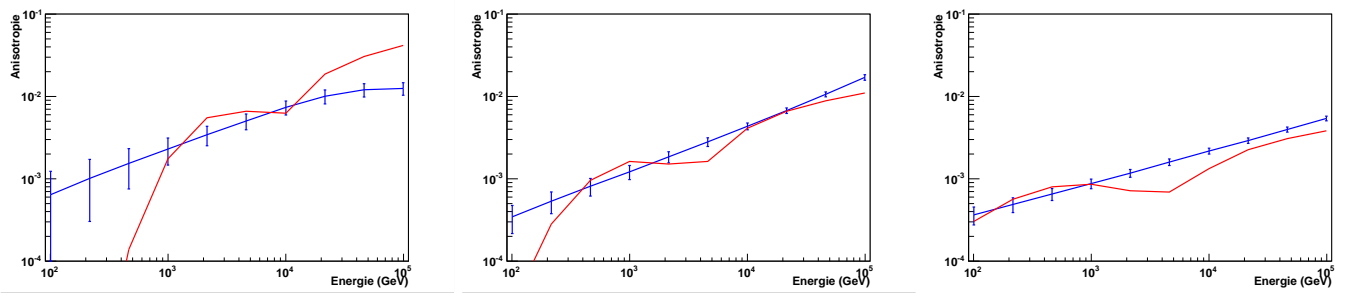


FIGURE 11.2: Anisotropies et intervalles de confiance à 68% de la zone extérieure (en bleu) et anisotropie du catalogue (en rouge) pour les modèles min, med et max et $\nu = 3$

Commençons par étudier ces incertitudes. Elles sont calculées statistiquement en faisant varier l'âge et la position des sources du catalogue dans leur bande d'incertitude. Cette figure, donnée en

11.3 montre que les erreurs sur le catalogue sont, de l'ordre de grandeur des incertitudes extérieures, le catalogue est donc assez contraint. De prime abord il est difficile de comparer deux amplitudes d'anisotropie. En effet cette observable étant décrite par un vecteur, les normes de deux signaux ne s'ajoutent pas simplement. il est d'ailleurs possible qu'elles s'annihilent. C'est pourquoi nous nous penchons maintenant sur chaque composante du vecteur anisotropie. On pourrait faire l'étude détaillée pour la zone extérieure, cependant nous avons déjà discuté le fait que la moyenne de ses composantes en y et z est nulle. Nous supposons donc que la principale contribution de la zone extérieure est un dipôle orienté vers le centre galactique. Nous regardons maintenant les composantes du catalogue.

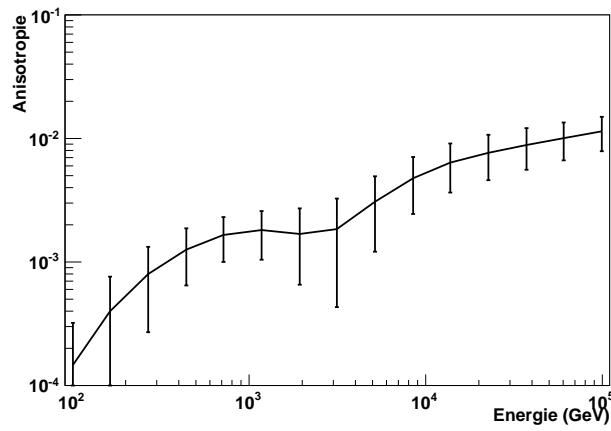


FIGURE 11.3: Incertitudes sur l'anisotropie provenant des erreurs du catalogue (modèle med)

2 LES FLUCTUATIONS DES SOURCES LOCALES

On peut voir clairement sur les figures 11.1 des fluctuations dans le signal de l'anisotropie autour de 10^3 GeV. C'est un effet particulièrement intéressant du modèle car les expériences observent également un spectre qui n'est pas une loi de puissance complète. Afin de se faire une idée sur la question, la figure 11.4 montre le profil du signal local dans la galaxie. L'anisotropie est proportionnelle au gradient de ce signal, on peut donc d'ores-et-déjà voir, qu'en fonction de l'énergie, le gradient peut changer de direction et qu'il varie non linéairement. Pour étudier cet effet, nous avons représenté les composantes moyennes du vecteur anisotropie du catalogue sur la figure 11.5.

On voit que le lieu de fluctuation de l'anisotropie correspond à une énergie pour laquelle les composantes δ_z et δ_x et δ_y ont la même amplitude. Avant cette énergie, la composante δ_y domine clairement

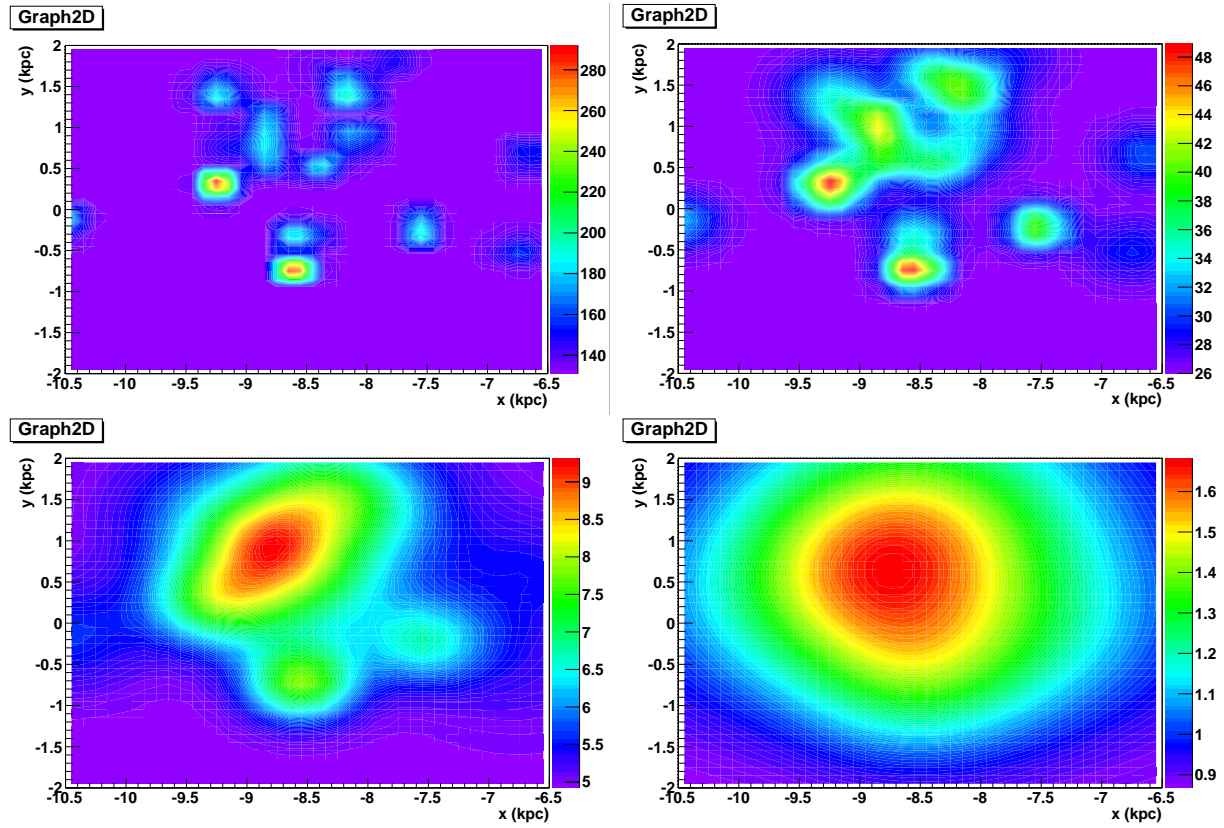


FIGURE 11.4: Profils de densité locale aux énergies de 100 GeV, 1 TeV, 10 TeV, 100 TeV.

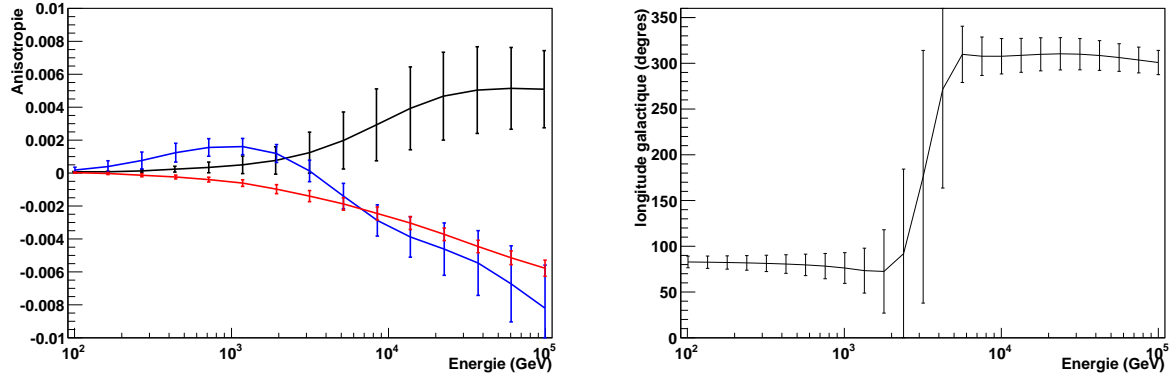


FIGURE 11.5: À gauche : les différentes composantes de l'anisotropie du catalogue, δ_x en noir, δ_y en bleu, et δ_z en rouge. À droite : évolution de la phase de l'anisotropie en fonction de l'énergie.

le signal. En se penchant sur l'étude de l'anisotropie produite par chaque source du catalogue (reportée sur la figure 11.6), on peut voir qu'au-dessous de 10 TeV, la source Vela domine largement le

signal et crée une forte anisotropie le long de la coordonnée y . Dans le cas où le catalogue domine l'anisotropie, il est donc possible qu'une source seule domine le signal d'anisotropie et produise des fluctuations. Cette tendance est traduite par un écart-type élevé de l'anisotropie locale. Étant donné le changement de la composante dominante de l'anisotropie, on doit s'attendre à observer également un changement dans la phase (la direction du maximum) de l'anisotropie. Sur la figure 11.5 on représente la phase moyenne de l'anisotropie locale en fonction de l'énergie (en coordonnées galactiques), et on voit très clairement un changement de direction du vecteur anisotropie au-delà de 10 TeV. Nous n'avons pas représenté la latitude galactique, car étant donnée la distribution de sources très piquée autour du disque, celle-ci varie en fait très peu. Les fluctuations de la phase nous montrent qu'il est possible qu'une source éclaire le ciel dans une direction préférentielle. Cependant, étant donné le profil des anisotropies de chaque source donné en 11.6, on peut voir qu'une source seule ne domine pas le signal à toutes les énergies, et on doit s'attendre à observer des changements de phase dans ce genre de cas. De ce fait, la modification de la phase de l'anisotropie en fonction de l'énergie est un indice fort d'un signal dominé par une seule source. Or les observations révèlent plutôt une phase constante sur plusieurs décades en énergie. Mais, comme nous l'avons vu, les projections des cartes en anisotropie telles que mesurées par les expériences provoquent des distorsions de ce signal. Nous discuterons les effets expérimentaux par la suite.

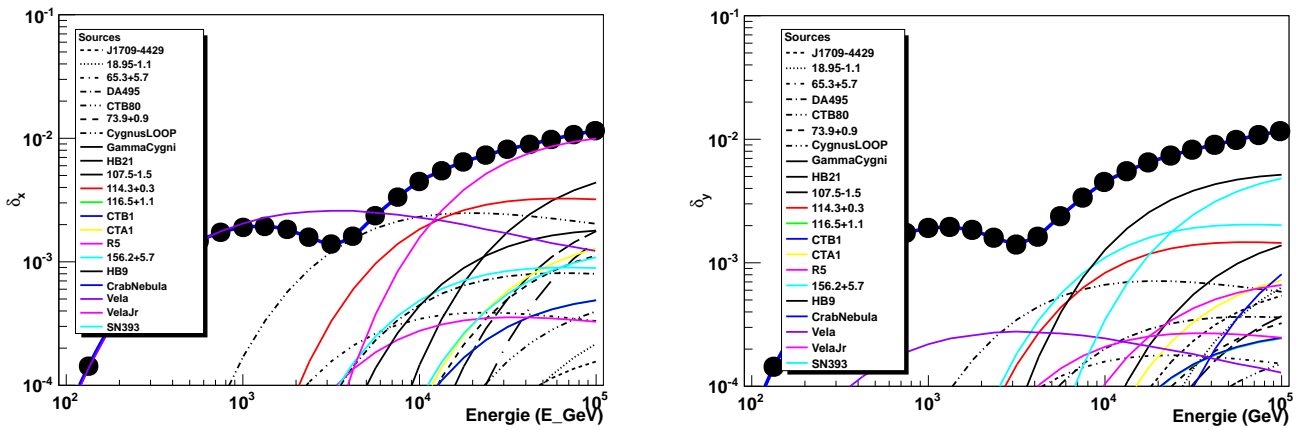


FIGURE 11.6: Composantes de l'anisotropie engendrée par les sources locales. À gauche selon la coordonnée x , à droite selon la coordonnée y . Les gros points indiquent le flux moyen.

3 AU-DELÀ DE MIN MED MAX

Pour essayer d'évaluer l'influence des paramètres de propagation et de déterminer si les sources locales sont ou non responsables de l'anisotropie observée, nous allons regarder brièvement le comportement de chaque paramètre. Commençons par étudier l'effet d'une modification du taux d'explosion local sur l'anisotropie. Ce genre de modèle, nous l'avons vu dans la partie II, permet d'expliquer les anomalies du flux de protons et d'héliums de PAMELA et CREAM. Pour évaluer l'effet du taux local sur l'anisotropie, nous avons tracé sur la figure 11.10 les anisotropies calculées dans un modèle avec un taux d'explosion galactique de 1 supernova par siècle. Du fait du faible nombre de source moyen dans ce modèle par rapport au nombre de sources locales, l'anisotropie de ces sources est plus importante, c'est bien l'effet observé. Dans ce contexte, le modèle a de grandes chances de prédire des anisotropies trop élevées. Nous ne le détaillons pas ici, mais de la même manière, mais l'influence de l'épaisseur du halo magnétique a un effet similaire.

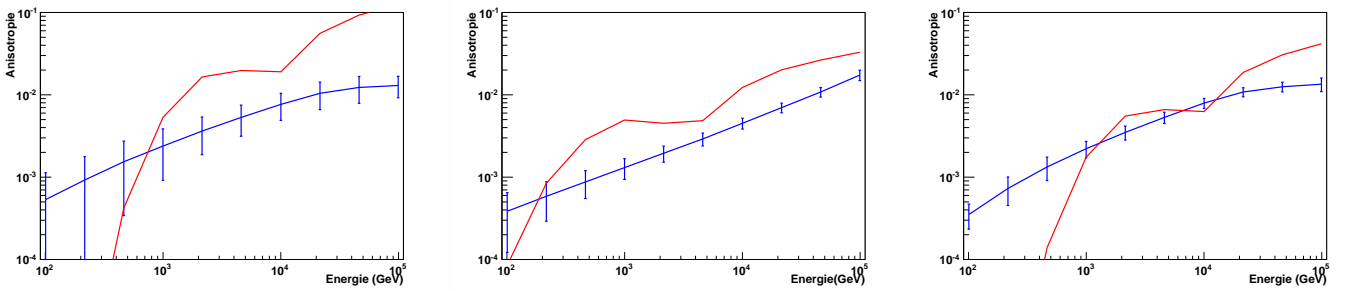


FIGURE 11.7: Anisotropies et intervalles de confiance à 68% de la zone extérieure (en bleu) et anisotropie du catalogue (en rouge) pour les modèles min, med et max et $\nu = 1$

Nous avons vu que les fluctuations locales dans le spectre d'anisotropie peuvent être le signe d'une composante vectorielle du vecteur anisotropie prenant le pas sur une autre, engendrant ainsi des fluctuations dans la phase de l'anisotropie. Les fluctuations prédites par l'anisotropie du catalogue sont plus importantes que les fluctuations observées, c'est le principal argument qui s'oppose à une dominance du catalogue. Cependant, la forme du terme d'anisotropie du catalogue suit une tendance relativement proche des données, il est donc tentant de faire varier les paramètres pour trouver la meilleure configuration de propagation. Nous n'avons pas effectué de test statistique détaillé, nous avons simplement ajusté les paramètres de propagation de manière à réduire l'anisotropie et adapter sa pente. Nous présentons ici un exemple de paramètres qui permet d'obtenir un bon accord avec les expériences, la figure obtenue est donnée en 11.8. Il s'agit là d'un exemple de paramètres, il peut sembler en désaccord avec certains paramètres trouvés dans la littérature, notamment à cause de la faible valeur de δ , c'est en fait une bonne illustration des effets des sources locales qui ont tendance à modifier la pente du spectre en anisotropie. Notons qu'une valeur faible de δ n'est pas sans conséquence puisque cela implique des spectres sources plus durs et donc des phénomènes d'accélération

plus efficaces. Nous ne discuterons pas en détail ce point car il s'agit ici d'un jeu de paramètre particulier donné à titre d'exemple. Pour mener une discussion rigoureuse il faudrait scanner entièrement l'espace des paramètres.

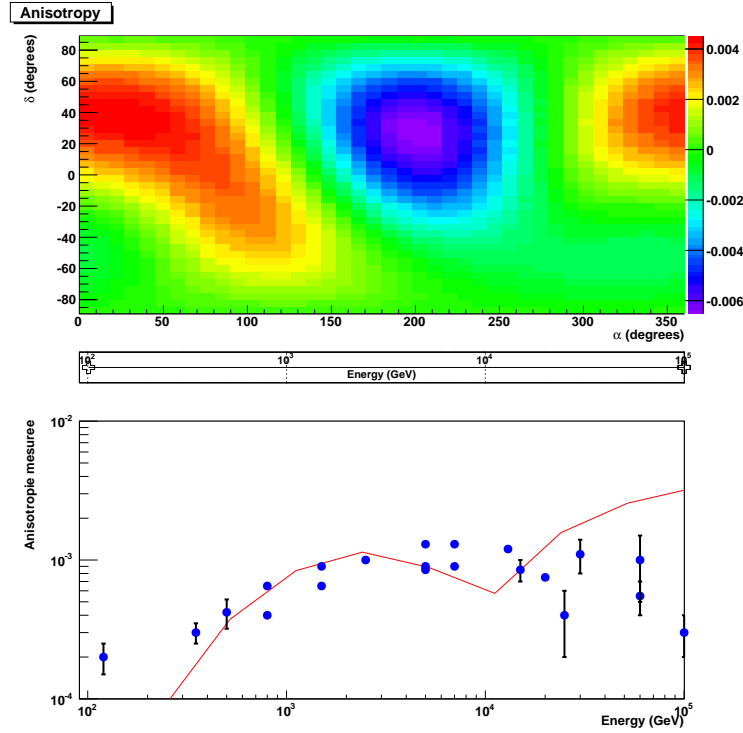


FIGURE 11.8: Carte d'anisotropie et valeur de l'anisotropie telle qu'extraite par les mesures. Les paramètres utilisés sont $D_0=0.15$ [kpc²/Myr], $\delta=0.6$, $L=6$ kpc, $\nu=3$ century⁻¹, la carte est à 100 TeV

La figure d'anisotropie repérée vers 5×10^5 GeV possède une phase proche de la carte d'anisotropie observée. En regardant l'évolution de la carte en fonction de l'énergie 11.9 on constate que cette phase apparaît à plus haute énergie que dans le observations. Elle apparaît après l'influence de Vela. Par ailleurs, le signal semble suivre une tendance à l'augmentation à 10^5 GeV ce qui est mesuré plus tard en énergie et de manière moins importante. Le principal problème est donc la phase, elle n'est pas constante et change après la zone d'influence de Vela. On pourrait essayer de trouver une configuration dans laquelle Vela n'a plus d'influence mais dans ce cas, il n'est pas possible d'observer un pallier autour de 10^4 GeV.

Ajoutons qu'un dernier effet de mesure n'a pas été développé ici car il nécessite une très grande connaissance des expériences : la taille des bins de mesure en énergie. En effet, l'expérience MILAGRO par exemple, mesure un signal avec une énergie médiane de 7 TeV et variant entre 4 TeV et 7 TeV. En supposant que l'on est dans un cas fluctuant, cet intervalle de mesure est exactement dans l'échelle de largeurs des fluctuations en fonction de l'énergie. Il est donc possible que les simples

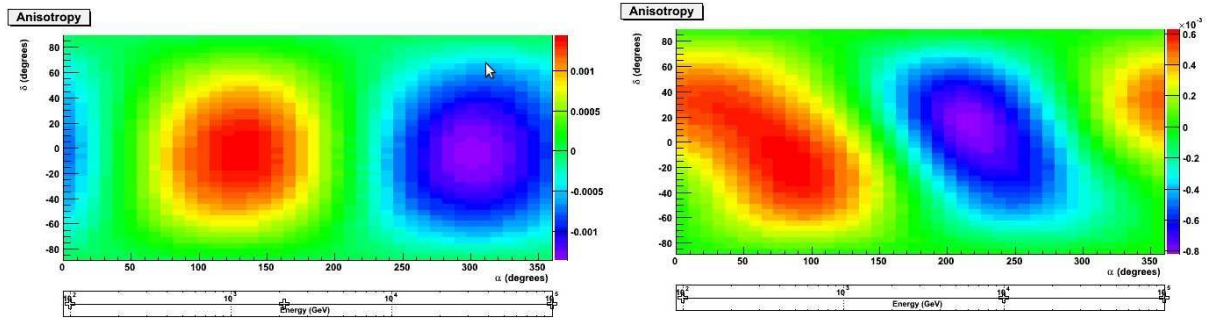


FIGURE 11.9: Anisotropies calculées pour 1 TeV et 10 TeV. Les paramètres utilisés sont $D_0=0.15$ [kpc²/Myr], $\delta=0.6$, $L=6$ kpc, $\nu=3$ century⁻¹

effets de mesures somment des contributions de directions opposées et réduisent ainsi l'anisotropie. Citons également l'expérience ICECUBE, à plus haute énergie, qui observe pour sa mesure à 126 TeV que 90% des particules qui se situent entre 10 TeV et 1 PeV. Le flux prédit forcément une forte anisotropie à haute énergie, cependant en imaginant la présence d'une composante plus isotrope du flux au PeV, alors la mesure à 126 GeV de ICECUBE serait influencée par cette composante isotrope. L'anisotropie serait alors beaucoup plus basse que l'anisotropie réelle. La méconnaissance des distributions en énergie de chaque mesure ne nous permet pas de conclure sur ce point, en effet nous avons pu vérifier que nos résultats sont particulièrement sensibles à cette distribution.

Cependant, pour étudier clairement cet effet il faut connaître avec précision les propriétés des détecteurs qui est un problème non évident dans le cadre de l'interaction théoricien / expérimentateur.

4 LA VARIANCE DU QUADRIPOLE

Les cartes d'anisotropies calculées en 11.9 suggèrent l'importance du quadripôle pour certains jeux de paramètres de propagation lorsque l'on travaille avec le catalogue. Il faut donc pouvoir évaluer sa variance. Le problème est que nous ne connaissons pas d'estimateur analytique simple du quadripôle, nous avons vu que sa détermination passe par les harmoniques sphériques. Nous présentons ici une méthode approchée pour essayer de calculer ce quadripôle rapidement sans avoir à calculer complètement les cartes d'anisotropie.

Le but du calcul est de sommer la contribution quadripolaire de chaque source. Cette contribution est déterminée par le coefficient C_2^0 des harmoniques sphériques. Considérons une diffusion en 3 dimensions dans un espace homogène sans borne. On négligera donc les effets de hauteur du halo et d'échappement radial. En appelant λ le rayon de la sphère de dernière diffusion, nous réécrivons le

propagateur en faisant apparaître les coordonnées sphériques de la source :

Réécriture du propagateur

Dans ces conditions, le propagateur d'une source située à la position \vec{r}_i par rapport à nous s'écrit

$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\|\vec{r}_i - \vec{\lambda}\|^2}{4Dt} \right\} \quad (11.25)$$

le vecteur $\vec{\lambda}$ pointe dans la direction (θ, ϕ) . En notant les coordonnées

$$\vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda \cos \phi \sin \theta \\ \lambda \sin \phi \sin \theta \\ \lambda \cos \theta \end{pmatrix} \quad (11.26)$$

donc

$$\|\vec{r}_i - \vec{\lambda}\|^2 = \rho_i^2 + \lambda^2 + z_i^2 - \lambda[(x_i \cos \phi + y_i \sin \phi) \sin \theta + z_i \cos \theta] \quad (11.27)$$

et donc

$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\rho_i^2 + \lambda^2 + z_i^2}{4Dt} \right\} \times \exp \left\{ \frac{2\lambda}{4Dt} [(x_i \cos \phi + y_i \sin \phi) \sin \theta + z_i \cos \theta] \right\} \quad (11.28)$$

soit

$$f(\theta, \phi) = A_i \exp \{ \alpha (x_i \cos \phi + y_i \sin \phi) \sin \theta + \alpha z_i \cos \theta \} \quad (11.29)$$

où

$$A_i \equiv \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\rho_i^2 + \lambda^2 + z_i^2}{4Dt} \right\} \quad \text{et} \quad \alpha \equiv \frac{\lambda}{2Dt} \quad (11.30)$$

En posant

$$x_i = r_i \cos \phi_i \sin \theta_i, \quad y_i = r_i \sin \phi_i \sin \theta_i, \quad z_i = r_i \cos \theta_i \quad (11.31)$$

cette expression peut se réécrire

$$f(\theta, \phi) = A_i \exp \{ \alpha r_i (\cos \phi_i \cos \phi + \sin \phi_i \sin \phi) \sin \theta_i \sin \theta + \alpha r_i \cos \theta_i \cos \theta \} \quad (11.32)$$

Le propagateur s'écrit finalement, pour la source i

$$f(\theta, \phi) = A_i \exp \{ \alpha r_i (\cos(\phi - \phi_i) \sin \theta_i \sin \theta + \cos \theta_i \cos \theta) \} \quad (11.33)$$

Il faut maintenant calculer les moments quadripolaires associés à la source i . Il faut donc à priori intégrer sur les trois dimensions avec les positions et âges de la source. Cependant, on peut choisir de se placer dans un système de coordonnées préférentielles. Si on oriente l'axe z' de ce nouveau système de coordonnées dans la direction de la source, alors $\rho_i = 0$ et le propagateur ne dépend que de θ . Dans cette situation le quadripôle est complètement développé le long de l'harmonique $Y_2^{0'}$. Il suffit donc de calculer une seule intégrale.

D'autre part, le signal final attendu dans la galaxie est un quadripôle orienté le long de l'axe z de la galaxie. La méthodologie adoptée ici est de calculer la composante $c'_{2,0}$ du coefficient des harmoniques sphériques dans la base préférentielle orientée vers la source, puis d'effectuer une rotation du système d'axes pour calculer la projection de cette harmonique sur l'harmonique Y_2^0 dans le référentiel galactique. On commence donc par calculer le quadripôle d'une source dans son référentiel propre.

Calcul dans la base naturelle

Dans la base dont l'axe z' pointe vers la source, le quadripôle est donné par

$$c'_{2,0} = A_i \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \iint e^{\alpha r_i \cos \theta} (3 \cos^2 \theta - 1) d \cos \theta d\phi \quad (11.34)$$

$$c'_{2,0} = 2\pi A_i \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int_{-1}^1 e^{\alpha r_i x} (3x^2 - 1) dx \quad (11.35)$$

ce qui se calcule en utilisant

$$\int x^2 e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x} \left(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) \quad (11.36)$$

on trouve

$$c'_{2,0} = 2\pi A_i \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left[e^{\alpha r_i x} \left(\frac{3x^2}{\alpha r_i} - \frac{2x}{\alpha^2 r_i^2} + \frac{2}{\alpha^3 r_i^3} - \frac{1}{\alpha r_i} \right) \right]_{-1}^1 \quad (11.37)$$

$$c'_{2,0} = 2\pi A_i \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left[(e^{\alpha r_i} - e^{-\alpha r_i}) \left(\frac{2}{\alpha r_i} + \frac{2}{\alpha^3 r_i^3} \right) - (e^{\alpha r_i} + e^{-\alpha r_i}) \frac{2}{\alpha^2 r_i^2} \right] \quad (11.38)$$

Le coefficient $c'_{2,0}$ est finalement donné par

$$c'_{2,0} = 2\pi A_i \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left[\left(\frac{1}{\alpha r_i} + \frac{1}{\alpha^3 r_i^3} \right) \text{sh } \alpha r_i - \frac{\text{ch } \alpha r_i}{\alpha^2 r_i^2} \right] \quad (11.39)$$

On peut vérifier que cette quantité converge pour $\alpha r_i \rightarrow 0$, dans ce cas la limite est donnée par

$$\left(\frac{1}{\alpha r_i} + \frac{1}{\alpha^3 r_i^3} \right) \text{sh } \alpha r_i - \frac{\text{ch } \alpha r_i}{\alpha^2 r_i^2} \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{15}(\alpha r_i)^2 + \frac{1}{140}(\alpha r_i)^4 + \frac{1}{5670}(\alpha r_i)^6 + \mathcal{O}((\alpha r_i)^8)$$

Donc dans le référentiel propre, dans lequel l'axe z' pointe dans la direction de la source, la distribution des rayons cosmiques dans le ciel donne lieu à un quadripôle ($\ell = 2$), dont seule la composante $c'_{2,0}$ est non nulle, par symétrie azimutale. Notons cette fonction

$$f(\theta') = A (3 \cos^2 \theta' - 1) \quad (11.40)$$

avec

$$A \equiv 8\pi A_i \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left[\left(\frac{1}{\alpha r_i} + \frac{1}{\alpha^3 r_i^3} \right) \text{sh } \alpha r_i - \frac{\text{ch } \alpha r_i}{\alpha^2 r_i^2} \right] \quad (11.41)$$

Il faut maintenant effectuer une rotation du système d'axes pour se replacer dans le référentiel de la galaxie. On note β l'angle d'Euler correspondant à la rotation de notre système. On développe dans l'encadré suivant la modification des coefficients des harmoniques sphériques sous l'effet de cette rotation.

Rotation du système d'axes

Lors d'une rotation du repère, les harmoniques sphériques se transforment selon (Blanco et al. 1997)

$$Y_m^\ell(\theta, \phi) \rightarrow \sum_{m'} D_{mm'}^\ell Y_{m'}^\ell(\theta, \phi) \quad (11.42)$$

où $D_{mm'}^\ell$ désigne l'opérateur de rotation. Lors d'une rotation décrite par les angles d'Euler α, β et γ , cet opérateur s'écrit

$$D_{mm'}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im\alpha} d_{mm'}^\ell(\beta) e^{-im'\gamma} \quad (11.43)$$

avec

$$d_{mm'}^\ell(\beta) = (-1)^{m+m'} \sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!(\ell+m')!(\ell-m')!} \\ \times \sum_k (-1)^k \frac{[\cos(\beta/2)]^{2\ell-2k-m+m'} [\sin(\beta/2)]^{2k+m-m'}}{k!(\ell-m-k)!(\ell+m'-k)!(m-m'+k)!} \quad (11.44)$$

Or, on s'intéresse ici à une distribution invariante par rotation autour de la rotation autour de l'axe z initial, et on ne s'intéresse qu'à la composante $m = 0$ du quadripôle final, soit $m = m' = 0$. Seule la rotation d'angle β est alors importante, et on réécrit l'expression précédente sous la forme

$$d_{00}^\ell(\beta) = (\ell!)^2 \times \sum_k (-1)^k \frac{[\cos(\beta/2)]^{2\ell-2k} [\sin(\beta/2)]^{2k}}{(k!(\ell-k)!)^2} \quad (11.45)$$

soit pour $\ell = 2$,

$$d_{00}^2(\beta) = 4 \times \sum_k (-1)^k \frac{(\cos(\beta/2))^{4-2k} (\sin(\beta/2))^4}{(k!(2-k)!)^2} \quad (11.46)$$

$$d_{00}^2(\beta) = 4 \times \left[\frac{1}{4} \cos^4\left(\frac{\beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin^4\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \quad (11.47)$$

$$d_{00}^2(\beta) = \cos^4\left(\frac{\beta}{2}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (11.48)$$

En utilisant les relations

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1 + \cos\beta}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1 - \cos\beta}{2} \quad (11.49)$$

on arrive après calcul à

$$d_{00}^2(\beta) = \frac{3 \cos^2\beta - 1}{2} \quad (11.50)$$

Le coefficient $c'_{2,0}$ doit donc être multiplié par

$$d_{00}^2(\beta) = \frac{3 \cos^2 \beta - 1}{2}.$$

Ce qui donne au final le coefficient $c_{2,0}$ recherché :

$$c_{2,0} = c'_{2,0} d_{00}^2 = 2\pi A_i \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left[\left(\frac{1}{\alpha r_i} + \frac{1}{\alpha^3 r_i^3} \right) \text{sh } \alpha r_i - \frac{\text{ch } \alpha r_i}{\alpha^2 r_i^2} \right] \frac{3 \cos^2 \beta_i - 1}{2} \quad (11.51)$$

La méthode permet donc d'obtenir immédiatement la contribution quadripolaire d'une source au signal total. Il suffit donc de générer les sources par méthode Monte-Carlo et d'évaluer leur angle β d'Euler, il est alors possible de calculer rapidement le quadripôle et sa variance. Nous ne développons pas la suite de cette étude ici, car nous avons préféré nous concentrer sur le dipôle.

5 CONCLUSION SUR LA MODÉLISATION DE L'ANISOTROPIE

Dans le contexte du modèle de la myriade couplé avec le catalogue local, l'anisotropie dipolaire est bien définie à condition d'utiliser les bonnes méthodes statistiques. Il est donc très improbable d'invoquer une fluctuation du dipôle pour expliquer une anisotropie trop faible. Cependant nous avons vu que le catalogue prédisait un quadripôle à haute énergie, il faudra donc s'intéresser dans le futur à l'influence des fluctuations du quadripôle, nous avons présenté une méthode pour le faire. Dans l'idéal pour être plus prédictif et assurer un catalogue qui domine le flux, il faudrait pouvoir travailler sur une zone locale plus grande et donc avoir un catalogue plus fourni.

Néanmoins, nous avons pu montrer que s'attendre à une anisotropie sans fluctuations de phase, impliquait des modèles avec peu de fluctuations dans l'anisotropie. Observons maintenant les cartes des mesures à la lumière de ce qui a été développé dans ce chapitre.

Les cartes présentent un maximum important à environ ($\alpha = 60^\circ$, $\delta = 0$) et un maximum plus local à ($\alpha = 330^\circ$, $\delta = 30^\circ$). Nous l'avons vu, elles sont similaires aux cartes que nous avons calculées à haute énergie. Les sources locales ne semblent pas pouvoir expliquer les fluctuations de petites échelles, néanmoins elles sont en mesure de créer une anisotropie à grande et moyenne échelle ($\ell = 1$ ou 2). Pour répondre définitivement à cette question il faudrait pouvoir lancer des tests statistiques sur les paramètres de propagation en simulant complètement les effets expérimentaux, nous l'avons vu, dans ce contexte, on ne peut pas se séparer de la distorsion engendrée par les mesures.

RÉFÉRENCES

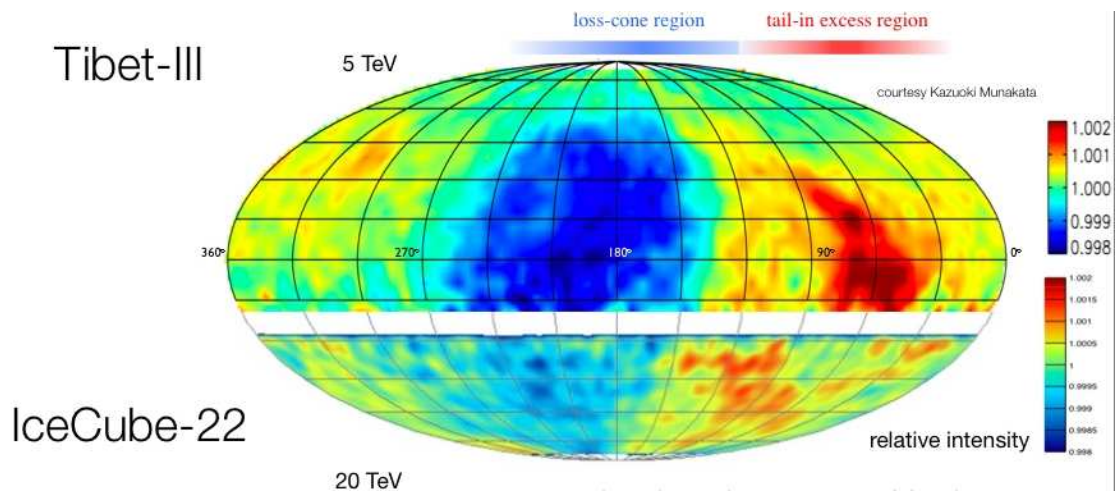


FIGURE 11.10: Combinaison des mesures d'anisotropie de TIBET et ICECUBE (Abbasi et al. 2010; Amenomori et al. 2006)

RÉFÉRENCES

- Abbasi, R., Adams, J., Aguilar, J. A., et al. 2010, ApJ, 718, L194
- Amenomori, M., Ayabe, S., Bi, X. J., et al. 2006, Science, 314, 439
- Blanco, M. A., Flórez, M., & Bermejo, M. 1997, Journal of Molecular Structure : THEOCHEM, 419, 19
- Blasi, P. & Amato, E. 2012, JCAP, 11
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Jeffrey, A., & Zwillinger, D. 2007, Table of Integrals, Series, and Products
- Ting, S. 2013, in ICRC 2013
- Weisstein, E. W. 2013, Exponential Integral – from Wolfram MathWorld, <http://math-world.wolfram.com/ExponentialIntegral.html>

Ainsi s'achève le résumé de trois années de travail. Nous avons montré que des prescriptions réalistes de sources impliquaient des défauts statistiques dans les solutions de l'équation de diffusion. Nous avons développé des outils pour pallier à ces défauts et montré que le flux mesuré était probablement très proche du flux stationnaire. Nous avons essayé d'expliquer la brisure de pente mesurée par les expériences CREAM et PAMELA en termes de surdensité locale de supernovæ. Cette explication, compatibles avec les paramètres du B/C nécessite de pousser les paramètres de propagation dans leurs derniers retranchements, mais le modèle n'est encore pas exclu car chaque raffinement du terme source lui permet d'obtenir de meilleurs résultats. C'est pourquoi nous poursuivons aujourd'hui l'étude de ce modèle en incluant des distributions de sources plus réalistes par exemple.

L'anisotropie du rayonnement cosmique est un problème hautement plus compliqué qu'il n'y paraît. Le modèle de la myriade permet de réduire la variance de ce modèle et montre que les sources locales peuvent engendrer des fluctuations dans le signal. Les paramètres trouvés sans test statistique ne sont pas éloignés de ceux obtenus en ajustant le rapport B/C. Nous avons montré que contrairement aux études classiques de l'anisotropie, l'utilisation d'un catalogue permet d'expliquer la tendance de l'anisotropie en fonction de l'énergie. Il faudrait effectuer un test plus complet pour définir clairement l'espace de phase compatible avec l'anisotropie et le B/C. Cependant nous l'avons vu, la vraie difficulté est de réconcilier la phase avec les mesures. Il semble que Vela domine fortement le signal, cette dominance n'est pas dans la direction du maximum observé, un catalogue plus complet pourrait peut-être compenser cette fluctuation. Pour finir il faut maintenant, comme nous l'avons fait pour le flux de protons, développer les outils théoriques plus développés nous permettant de calculer les intervalles de confiance. Ces outils nous permettront également de conclure sur le comportement de la variance théorique de l'anisotropie. D'autre part l'étude est entrain de se poursuivre sur le quadripôle.

Le modèle de la myriade est en plein développement, il doit maintenant être confronté aux prédictions de rayons γ mais avant cela il faut le confronter aux résultats récents d'AMS-02 (voir figure 12.1). L'expérience a remesuré le flux de protons entre le GeV et le TeV. Leurs résultats ne montrent pas la brisure de pente que nous essayons d'expliquer. Ces résultats sont en désaccord avec les résultats de PAMELA, mais la tendance du flux mesuré semble quand même mettre en évidence une brisure de pente avec le spectre mesuré par CREAM. Pour pouvoir vraiment effectuer des prédictions entre ces différents spectres il faudra attendre l'expérience ISSCREAM de détection des rayons cosmiques, qui devrait pouvoir travailler aux énergies comprises entre celles d'AMS-02 et celles de CREAM. Dans le cas où les résultats d'AMS-02 confirmeraient effectivement une loi de puissance sans brisure, il serait intéressant de pouvoir contraindre les modèles de propagation grâce aux fluctuations prédites pour chaque jeu de paramètres dans le cadre du modèle de la myriade. Malgré ce point, les outils développés dans cette thèse devraient être utilisés dans chaque modèle considérant

des événements ponctuels (comme par exemple dans les modèles aux ultra-hautes énergies), dans le but de quantifier réellement l'incertitude statistique liée à chaque modèle.

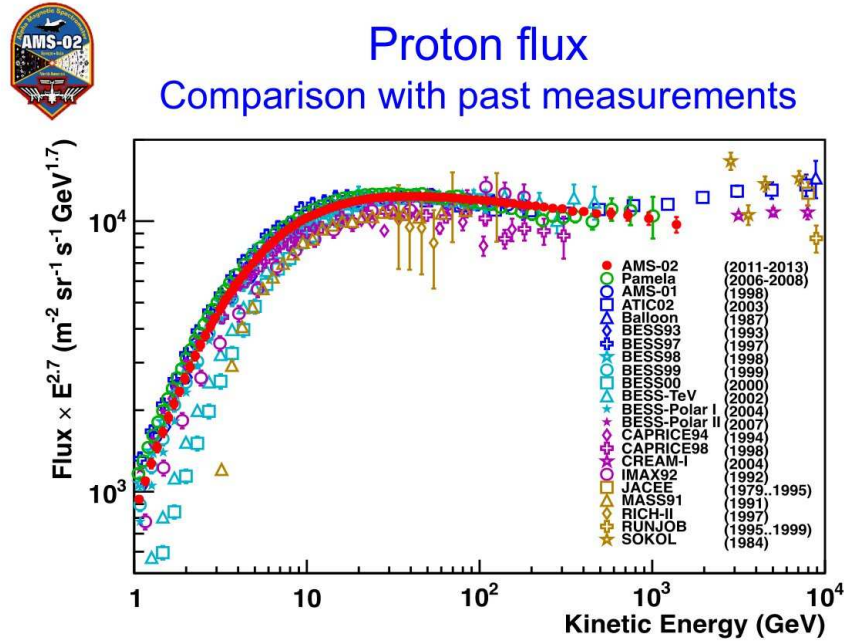


FIGURE 12.1: Mesure du flux de protons par AMS-02 (Ting 2013)

Pour finir, il convient, à la lumière des résultats de cette thèse, d'entamer une collaboration étroite entre théoriciens et expérimentateurs pour répondre à la question de l'anisotropie. En effet, nous avons pu montrer que les effets expérimentaux ne sont pas pris en compte dans les résultats théoriques, mais ils sont d'une importance capitale. D'autre part les effets pouvant influencer sur l'anisotropie sont multiples, puisque chaque effet galactique local est susceptible de jouer un rôle, en augmentant l'anisotropie ou en la diminuant. De ce fait, pour l'instant, retenons, que de façon générale, on ne constate pas de protocole rigoureux pour lier les travaux théoriques aux mesures expérimentales et nous ne connaissons pas suffisamment bien l'environnement astrophysique local pour statuer en détail sur l'anisotropie. C'est pourquoi les arguments rejetant certains jeux de paramètres de propagation à cause de leur influence sur l'anisotropie ne sont selon moi pas solides. De vrais éléments de réponse pourront être apportés en unifiant les méthodes de mesure d'anisotropie sur de grandes échelles d'énergies. Pour finir, l'arrivée d'AMS-02 apportera peut-être de nouveaux éléments sur les mesures d'anisotropie de par son statut d'expérience dans l'espace pouvant s'affranchir de certains effets observationnels.